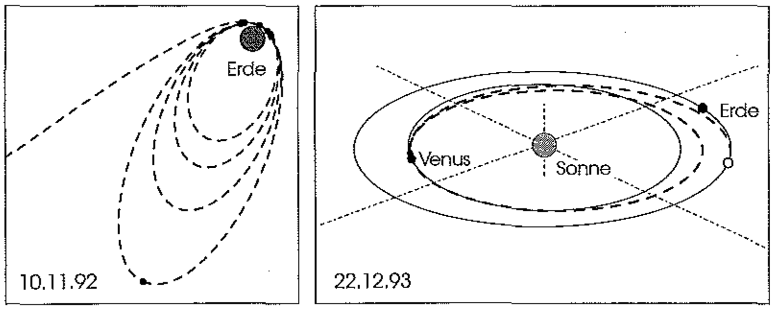

Abb. 1 Ausspiralen aus der Erdumlaufbahn (li.) und Flug zur Venus (re.): Start am 6. 11. 92, Verlassen der Erdumlaufbahn am 10. 11. 92, Ankunft an der Venus am 22. 12. 93; $m(t_f) = 0{,}362$. Die dreidimensionale Flugbahn wurde vollständig und in einem Stück optimiert, relative Genauigkeit $\leq 10^{-8}$.

Als Ergebnis der Optimierung zeigt sich, daß die geforderte Mission mit einem sehr einfachen und billigen Triebwerkssystem durchführbar ist. Die Eckdaten der in Abb. 1 dargestellten Mission lauten: $m_0 = 250$ kg, Treibstoffverbrauch 159,5 kg; 1 Feststofftriebwerk $\beta_1 = 300$ N (1 Zündsequenz) und 1 Mono-Hydrazintriebwerk $\beta_2 = 20$ N, max. Schubdauer $\leq 2{,}3 \cdot 10^{-4} \cdot (t_f - t_0)$.

Die Optimierung zeigt erstmalig in dieser Form, daß es besser ist, sich mit dem Steuertriebwerk teilweise aus der Erdumlaufbahn herauszuspiralen und erst beim letzten Perigäumsdurchgang den Feststoffmotor zu zünden (sog. „inverse Schubsequenz"; ingenieurmäßig üblich ist Zündung des Feststoffmotors am Anfang). Diese neu entwickelte Subsequenz führt zusätzlich zu einer Reduktion des Treibstoffverbrauchs um mehr als 15%.

Literatur

1 Bulirsch, R.; Callies, R.: Optimal trajectories for a multiple rendezvous mission to asteroids. Acta Astronautica **26** (1992), 587–597.
2 Callies, R.: Optimal design of a mission to Neptune. In Bulirsch, R.; Miele, A.; Stoer, J.; Well, K. H. (eds.): Optimal control. Proc. Conf. on Optimal Control and Variational Calculus, Oberwolfach 1991. Internat. Ser. of Numer. Math., Birkhäuser Verlag, Basel 1993, pp. 341–349.
3 Oberle, H. J.: Numerische Behandlung singulärer Steuerungen mit der Mehrzielmethode am Beispiel der Klimatisierung von Sonnenhäusern. Thesis, Mathematisches Institut, Technische Universität München 1977.
4 Wiley, J. J.; Wertz, J. R. (ed.): Space mission analysis and design. Kluwer Academic Publisher, Dordrecht 1992.

Anschrift: Dr. Rainer Callies, Mathematisches Institut, Technische Universität München, Postfach 202420, D-80290 München, Deutschland

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **74** (1994) 6, T 591 – T 593 Akademie Verlag

Kiehl, M.; Stryk, O. von

Generalized Necessary Conditions for Optimal Control Problems of Bolza Type: Theory and Application

MSC (1991): 49J15, 49K15, 76W05

Let us consider an optimal control problem $J := \min\limits_u \int_a^b L(y(t), u(t), t)\,\mathrm{d}t$ subject to a system of differential equations $\dot{y}(t) = g(y(t), u(t), t)$ with $y = (y_1, \ldots, y_n)^T$, $u = (u_1, \ldots, u_n)^T$, u bounded, $L: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $g: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$. L and g are assumed to be continuously differentiable.

If the Jacobian $g_u := (\partial g_i/\partial u_j)_{i,j=1}^n$ is regular, we obtain

$$\sigma(u, y, t) := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(L_u g_u^{-1}) - L_y + L_u g_u^{-1} g_y = 0 \tag{1}$$

in subarcs where the control is free, i.e. not at the boundary of the control space. This relation is valid as σ is related to the Hamiltonian $H := L + \lambda^T g$ via

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(H_u g_u^{-1}) = \sigma(u, y, t)\,. \tag{2}$$

Therefore, equation (1) corresponds to the classical condition $\mathrm{d}H_u/\mathrm{d}t = 0$ (as $H_u = 0$). This condition, however, is obtained only under sufficient smoothness assumptions on the model functions. In some applications, however, the model functions may change in a non-differentiable way with the state variables. Then the following generalizations by Theorems 1 and 2 are required.

Theorem 1: *Let $\eta_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ be the optimal solution of the variational problem*

$$\min_y J[y], \qquad J[y] := \int_a^b L(y, \dot{y}, t)\,\mathrm{d}t\,. \tag{3}$$

The functions $L \colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ and $L_{\dot{y}}$ are assumed to be continuously differentiable in a neighborhood of $(\eta_0(t), \dot{\eta}_0(t), t)$ for all $t \in [a, b]$ with one exception: $\partial L/\partial y_i$ and $\partial L_{\dot{y}}/\partial y_i$ need not exist for $y(t) = \eta_0(t)$. But then at least the one sided limits for $h \downarrow 0$ and $h \uparrow 0$ of $\partial L(\eta_0 + he_i, \dot{\eta}_0, t)/\partial y_i$ and $\partial L_{\dot{y}}(\eta_0 + he_i, \dot{\eta}_0, t)/\partial y_i$ are assumed to exist. Then, for $i = 1, \dots, n$, the following necessary conditions hold:

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{h\downarrow 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, L_{\dot{y}_i}(\eta_0 + he_i, \dot{\eta}_0, t) - L_{y_i}(\eta_0 + he_i, \dot{\eta}_0, t)\right) \leqq 0\,, \\ &\lim_{h\uparrow 0}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, L_{\dot{y}_i}(\eta_0 + he_i, \dot{\eta}_0, t) - L_{y_i}(\eta_0 + he_i, \dot{\eta}_0, t)\right) \geqq 0\,, \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

where e_i is the i-th canonical unit vector.

Note that if $\mathrm{d}L_{\dot{y}}(\eta, \dot{\eta}, t)/dt - L_y(\eta, \dot{\eta}, t)$ is continuous, the inequalities (4) are equivalent to the well-known Euler-Lagrange equation.

Theorem 2: *Let $\eta_0, u_0 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ be the optimal solution of the optimal control problem*

$$\min_u J[u], \qquad J[u] := \int_a^b L(y, u, t)\,\mathrm{d}t\,, \quad \text{s.t.} \quad \dot{y} = (y, u, t)\,. \tag{5}$$

The functions L, L_u, g, and g_u are assumed to be continuously differentiable except with respect to y for $y(t) = \eta_0(t)$ where only the one-sided limits are assumed to exist and $g_u \in \mathbb{R}^{n\times n}$ is assumed to be regular. Then, for $i = 1, \dots, n$, the following necessary conditions hold on subarcs where the control is free:

$$\lim_{h\downarrow 0} \sigma_i(u_0, \eta_0 + he_i, t) \leqq 0 \leqq \lim_{h\uparrow 0} \sigma_i(u_0, \eta_0 + he_i, t)\,. \tag{6}$$

Under the assumption that u is free at time t_s this condition can a priori determine the state variables $y(t_s)$ and the boundary value problem can therefore be decoupled at t_s.

Example: The hydroelectric power plant described in [1] leads to the optimal control problem

$$\min_{u, y(0)} - g \int_0^T y(t)\, u(t)\, \omega(u(t), y(t))\,\mathrm{d}t\,, \qquad g = 9.81\ [\mathrm{m/s^2}]\,, \tag{7}$$

with the dynamic equation $\dot{y}(t) = (S(y(t), t) - u(t)) \Big/ \dfrac{\partial I(y)}{\partial y}$, the boundary conditions $y(0) = y_0$, and the constraints $y_{\min} := 126\ [\mathrm{m}] \leqq y(t) \leqq 149\ [m] =: y_{\max}$, $0 \leqq u(t) \leqq 107\ [\mathrm{m^3/s}]$. $Z(t)$ describes the influx of water which might be known only a few hours in advance. $W(y)$ is the capacity of the pipeline. The functions W, ω and I are smooth. But the function S defined by $S(y, t) = \min\{Z(t), W(y)\}$ is not differentiable with respect to y.

For a given time t_s when the optimal control is free, i.e., singular in this case, we examine σ and look for roots of $\sigma = 0$ or, more general according to Theorem 2, the points where σ does change its sign.

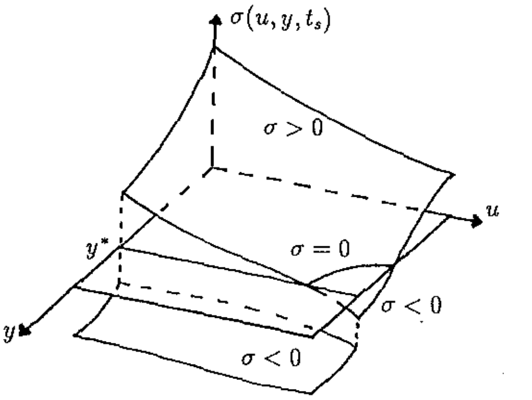

Fig. 1. An example of $\sigma(u, y, t_s)$

For a fixed $t = t_s$ the equation $\sigma(u, y, t_s) = 0$ defines a non-linear curve in the (u, y)-space. Thereby $y(t_s)$ and $u(t_s)$ are not uniquely determined.

Another possibility is that σ may change its sign at a discontinuity. In the example of the hydroelectric power plant problem S does not depend on u. Therefore σ has a discontinuity in a region that is orthogonal to the state space. The state variables $y(t_s) = y^*(t_s)$ are determined if there is no root of σ in the feasible region of the constraints and problem (7) decouples at t_s into two problems.

Multiple decoupling allows us to find the optimal solution of problem (7) in [2] over long time periods although $Z(t)$ might only be known for the very soon future.

References

1 Bauer, W.; Reisinger, H.; Wacker, Hj.: Höhensteuerung eines Tagesspeicherkraftwerks. Z. f. Operations Res. **26**, (1982), B145–B167.
2 Kiehl, M.; von Stryk, O.: Real-time optimization of a hydroelectric power plant. Computing **49** (1992), 171–191.

Anschrift: Dr. Martin Kiehl, Dipl.-Math. Oskar von Stryk, Technische Universität München, Mathematisches Institut, Postfach, D-80290 München, Germany

ZAMM · Z. angew. Math. Mech. **74** (1994) 6, T 593–T 595 Akademie Verlag

Klötzler, R.

Flußoptimierung

MSC (1991): 49K30, 49M39, 49N15, 90C34, 90C48

1. Einleitung

Bei der Behandlung von Steuerungsproblemen mit Zustandsbeschränkungen treten nicht selten erhebliche Schwierigkeiten in der Beurteilung der Existenz optimaler Prozesse und bei deren numerischer Berechnung auf. Zur Überwindung der ersten Schwierigkeiten schlug L. C. Young 1969 in [6] vor, in Weiterverfolgung des 20. Hilbertschen Problems den Lösungsbegriff zu erweitern durch Übergang zu „generalized curves" und „generalized flows". Die numerischen Konzepte dieses Zugangs wurden später durch F. J. Rubio 1986 [5] geschaffen unter Einsatz semi-infiniter linearer Optimierungsmethoden. Im nachfolgenden soll eine eigenständige Modifikation dieser Ideen vorgestellt werden, die bereits in den Arbeiten [2], [3] des Verfassers ihren Anfang fanden und heute numerisch erprobt vorliegen. Diese Modifikation wird demonstriert an parametrischen Variationsproblemen einfacher Integrale und ihren zugeordneten Ersatzaufgaben in Gestalt von Flußproblemen.

2. Formulierung des Flußproblems

Es sei Ω ein beschränktes Lipschitzgebiet des E^n, r eine reelle Funktion auf $\Omega \times E^n$, $r(\cdot, v)$ summierbar auf Ω, $r(t, \cdot)$ streng konvex und positiv homogen ersten Grades und schließlich existiere eine Konstante $m > 0$ mit $r(t, v) \geqq m|v|$ für alle $v \in E^n$. α sei ein vorgegebenes Maß auf der σ-Algebra aller Lebesgue-meßbaren Teilmengen e von Ω, das der Ausgeglichenheitsbedingung $\int\limits_\Omega d\alpha(t) = 0$ genügt und mit $\alpha(e)$ den „Bedarf" der Menge e charakterisiert. Wir ordnen jedem parametrischen Variationsproblem

$$\int\limits_0^T r(\eta(\tau), \dot{\eta}(\tau))\, d\tau \to \text{Min} \quad \text{bzgl. aller} \quad \eta \in W_\infty^{1,n}(0, T) \tag{P$_0$}$$

mit $\eta(\tau) \in \Omega$ und Randbedingungen $\eta(0) = a$, $\eta(T) = b$ ein Flußproblem zu, indem die Trajektorien $y = \eta(\tau)$ durch vektorielle Mengenfunktionen μ beschränkter Variation von Transportflüssen ersetzt werden, die einer gewissen „Kontinuitätsgleichung" genügen, welche den stromartigen Zusammenhang dieser Flüsse sichert. Das zugeordnete Flußproblem lautet

$$\int\limits_\Omega r(t, d\mu(t)) := \sup_{\substack{u \in L_\infty^n(\Omega)\ \text{für alle}\ v \in E^n \\ u^T(t)v \leqq r(t,\, v)}} \int\limits_\Omega u^T(t)\, d\mu(t) \to \text{Min} \tag{P}$$