

Optimale und robust-optimale Steuerungen

Grundlagen, numerische Berechnung und Anwendung bei der semi-aktiven Kfz-Schwingungsdämpfung

Am Fachbereich Informatik der
Technischen Universität Darmstadt
eingereichte

Dissertation

zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktor-Ingenieurs (Dr.-Ing.)

von

Dipl.-Math. **Uwe Rettig**

Referenten der Arbeit: Prof. Dr. Oskar von Stryk
Prof. Dr. Hans Josef Pesch

Tag der Einreichung:
Tag der mündlichen Prüfung:

Vorwort

Geboren 1972 und aufgewachsen in Delitzsch habe ich sehr frühzeitig ein Interesse an der Mathematik und mathematischen Fragenstellungen in Naturwissenschaft und Technik gehabt. Nicht zuletzt um den Ansprüchen meines Großvaters zu genügen, habe ich an vielen Mathematik-Olympiaden teilgenommen, die in der ehemaligen DDR eine gewisse Popularität besaßen. Alle Mathematiklehrer, die ich kennenlernen durfte, insbesondere Herr Lindner und Herr Dr. Schiemann, haben ihre Aufgabe der Förderung ihrer Schüler sehr ernst genommen. So kam es, dass ich mein Abitur an der Spezialschule für Mathematik und Physik der Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg ablegen konnte. Gerade noch rechtzeitig, bevor sie in den Wirren der Wende den Einsparungen zum Opfer fiel.

Die neuen Möglichkeiten nutzend, studierte ich an der Technischen Universität Clausthal Technomathematik. Unter der Obhut von Professor H. J. Pesch und seinem damaligen Assistenten Professor M. Breitner arbeitete ich mit großem Interesse an Praktikums- und Diplomarbeit.

Die Arbeit bei Professor Pesch eröffnete mir den Weg an die Technische Universität München. Hier durfte ich in der Arbeitsgruppe von Herrn Professor R. Bulirsch eine Stelle als wissenschaftlicher Mitarbeiter antreten. Für die darauf folgende fruchtbare Zusammenarbeit mit meinem Teilprojektleiter im SFB 438, Betreuer und Arbeitskollegen Herrn Professor O. von Stryk bin zu besonderem Dank verpflichtet. Dies gilt insbesondere für die Zeit vor und nach seinem Weggang an die Technische Universität Darmstadt.

Die entstandene Arbeit wurde von der Deutschen Forschungsgemeinschaft im Rahmen des Teilprojektes C4 „Optimale semi-aktive Schwingungsdämpfung mit elektrorheologischen Flüssigkeiten“ des SFB 438 gefördert. Mein Dank geht auch an die TESIS DYNARE GMBH, München, für die Bereitstellung des Programms VEDYNA sowie an die SCHENCK PEGASUS GMBH, Darmstadt, für die Messdaten eines Prototypen eines ERF-Stoßdämpfers.

Das freundschaftliche Verhältnis zu Dr. M. Hardt hat für mich einen besonderen Stellenwert, denn er ist gewissermaßen „Schuld“ an meinem Interesse für die Themen dieser Arbeit. Seine Begeisterungsfähigkeit und Hilfsbereitschaft hatten einen nicht zu benennenden Einfluss auf diese Arbeit. Ebenso gilt Herrn Dr. K.-D. Reinsch mein besonderer Dank. Er nahm sich viel Zeit für die unzähligen Gespräche und unterstützte mich in vielerlei Hinsicht.

Das gute Verhältnis unter den Mitarbeitern des Lehrstuhls hat mich stets motiviert. Viele uneigennützigte Hilfestellungen und Anregungen verdanke ich M. Ehmann bei der Erstellung von Filmsequenzen und der Einarbeitung in das Programm VEDYNA. Für die hilfreichen Diskussionen und Unterstützungen gilt mein Dank auch A. Beiz, Dr. J. Haber und Dr. C. Penski.

Keine Worte können sagen, wie sehr ich meiner Familie dankbar bin. Meine Mutter, der ich diese Arbeit widmen möchte, und mein Vater haben mich stets unterstützt. Ebenso meine Großmutter und meine Schwester Ulrike. Den zweifelsfrei größten Beitrag musste jedoch meine Frau Sanita leisten. Sie tat es großartig!

Inhaltsverzeichnis

Inhaltsverzeichnis	iii
Symbolverzeichnis	1
Einleitung	3
I Theorie der optimalen und robusten Steuerungen	7
1 Stabilität dynamischer Systeme	8
1.1 Dynamische Systeme	8
1.2 Stabilität	10
1.2.1 Lyapunovfunktionen	11
1.2.2 Linearisierung	13
1.2.3 Einzugsbereich stabiler Lösungen	15
1.3 L-Stabilität	17
1.3.1 Systeme des L_2	20
1.4 Dissipative Systeme	21
1.4.1 Eigenschaften dissipativer Systeme	22
2 Optimalsteuerungsprobleme	26
2.1 Grundaufgabe	26
2.2 Notwendige Bedingungen	27
2.2.1 Minimumprinzip	28
2.2.2 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung	30
2.2.3 Beziehungen der Randdaten	30
2.2.4 Singuläre Steuerungen	31
2.3 Aufgaben mit Ungleichungsnebenbedingungen	32

2.4	Stabilität optimal gesteuerter Systeme	33
2.4.1	Lyapunovstabilität	33
2.4.2	Schlechteste Störungen und dissipative Systeme	34
3	Robuste Steuerungen	36
3.1	Robustheit von Steuerungen	36
3.1.1	Anmerkungen	36
3.2	Optimalgesteuerte dissipative Systeme	37
3.2.1	Transformation des Steuerungsproblems	37
3.2.2	Eigenschaften der Modellierung	38
3.3	Zwei-Personen Nullsummen Differentialspiele	40
3.3.1	Sattelpunktprobleme	41
3.3.2	Notwendige Bedingungen für die Lösung des Sattelpunktproblems	42
3.3.3	Isaacs-Gleichung	44
3.3.4	Schwache Lösungen der Isaacs-Gleichung	47
3.4	Trajektorien von Robusten Steuerungen	49
3.4.1	Barrieren	52
3.4.2	Störungsdämpfung	52
3.4.3	Transformation der Aufgabe	55
II	Numerische Lösung nichtlinearer Steuerungsprobleme	61
4	Numerische Methoden der Diskretisierung	62
4.1	Indirekte Verfahren	64
4.2	Direkte Verfahren	66
4.2.1	Endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsaufgaben	67
4.2.2	Direkte Verfahren mit Einschrittverfahren	68
4.2.3	Diskretisierungen auf der Basis von Runge-Kutta-Verfahren	70
4.2.4	Diskretisierungen auf der Basis des Kollokationsansatzes	74
5	Kollokation als implizite Runge-Kutta-Verfahren	80
5.1	Adjungiertenschätzungen	86
5.1.1	Die Randbedingungen	87
5.1.2	Beispiele	88
5.1.3	Bemerkungen zur Ordnung des Verfahrens	91

6	Implementierung zur Berechnung numerischer Lösungen	95
6.1	Direkte Diskretisierungsverfahren	95
6.2	Adjungiertenschätzung	98
III	Optimale semi-aktive Schwingungsdämpfung mit elektorrheologischen Flüssigkeiten	100
7	Optimale semi-aktive Schwingungsdämpfung	101
7.1	Elektorrheologische Fluide	102
7.1.1	Wirkungsweise elektorrheologischer Fluide	102
7.1.2	Modellierung der Dynamik von ERF-Schwingungsdämpfern	104
7.2	Modellierung der Kraftfahrzeugdynamik	106
7.2.1	Linearisierte Teilfahrzeugmodelle	106
7.2.2	Gesamtfahrzeugdynamiksimulation in Echtzeit	108
7.3	Formulierung von Gütekriterien	108
7.4	Lineare optimale und robust-optimale Rückkopplungssteuerungen	110
7.5	Nichtlineare robust-optimale Steuerungen	112
8	Validierung	117
8.1	Kalibrierung des ERF-Stoßdämpfermodells	117
8.1.1	Das Verfahren	117
8.1.2	Ergebnisse	119
8.2	Echtzeitfähige Software-in-the-Loop Simulation	121
8.2.1	Steueralgorithmus	121
8.2.2	Simulation der Gesamtfahrzeugdynamik für ein Testmanöver zur Validierung der Steuerung	122
9	Zusammenfassung	126
	Literaturverzeichnis	127
	Anhang	136
A.1	Implementierungen	136

Symbolverzeichnis

$\mathbb{R}, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^+$	reelle, positive reelle, nichtnegative reelle Zahlen
\mathbb{N}, \mathbb{N}_0	natürliche Zahlen, $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\ \cdot\ , \ \cdot\ _p$	euklidische Norm bzw. p -Norm (siehe S. 17)
$\ \cdot\ _Z$	Norm eines Vektors in Z
$A _{\bar{x}}$	Auswertung der Funktion $A(x)$ an der Stelle $x = \bar{x}$
\mathbf{a}_i (bzw. $\mathbf{a}_{(\cdot)}^{(i)}$)	i -te Komponente eines Vektors \mathbf{a} (bzw. eines indizierten Vektors $\mathbf{a}_{(\cdot)}$)
n_x	Dimension des Zustandsvektors
n_u	Dimension des Vektors der Steuerungen
n_w	Dimension des Vektors der Störungen
n_v	Dimension des Ausgabevektors
t_0, t_f	Anfangs- und Endzeitpunkt des betrachteten Intervalls
$\mathbf{x} \in X \subset \mathbb{R}^{n_x}$	Zustandsvektor
$\mathbf{u} \in U \subset \mathbb{R}^{n_u}$	Vektor der Steuerungen
$\mathbf{w} \in W \subset \mathbb{R}^{n_w}$	Vektor der Störungen
$\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n_v}$	Ausgabevektor
$\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}$	Signal des Zustands als Funktion $\mathbf{x} : [t_0, t_f] \rightarrow X$
$\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$	Signal der Steuerung als Funktion $\mathbf{u} : [t_0, t_f] \rightarrow U$
$\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}$	Signal der Störung als Funktion $\mathbf{w} : [t_0, t_f] \rightarrow W$
$\mathbf{v}(\cdot) \in \mathcal{V}$	Signal der Ausgabefunktion $\mathbf{v} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_v}$
$\mathbf{x}^\Delta \in \mathbb{R}^{n_x \times n}$	Diskretisierungsvektor des Zustands
$\mathbf{u}^\Delta \in \mathbb{R}^{n_u \times n}$	Diskretisierungsvektor der Steuerung
Δ	Zeitgitter einer Diskretisierung des Intervalls $[t_0, t_f]$
h_k	Schrittweite des Intervalls $[t_k, t_{k+1}]$
$\mathbf{l} : D \rightarrow \mathbb{R}^{n_v}$	Ausgabevektor als Funktion der Werte von $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}$, so dass $\mathbf{v}(t) = \mathbf{l}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t))$
$\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$	rechte Seite der Differentialgleichung
$l : D \rightarrow \mathbb{R}$	normierte reellwertige Ausgabefunktion, Funktionalintegrand
$\mathbf{r} : D \rightarrow \mathbb{R}^{n_r}$	Vektor der Randbedingungen
λ	Funktionsvektor der adjungierten Variablen
μ, ν	Funktionen der Lagrangemultiplikatoren der Ungleichungsnebenbedingungen bzw. angekoppelten Randbedingungen
κ, σ, η	Lagrangeparameter der angekoppelten Gleichungs- und Ungleichungsnebenbedingungen sowie der Randbedingungen bei endlich-dimensionalen Minimierungsproblemen
H	Hamiltonfunktion

$\mathcal{J} : \mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$	Minimierungs- oder Bewertungsfunktional
$\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$	Mayersches Zielfunktional bei Optimalsteuerungsproblemen
$\mathbf{T}(\cdot) : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{X}$	Operator, der bei gegebenfalls fester Steuerung $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}$ Störungen $\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}$ auf Trajektorien $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}$ abbildet.
L_p^n	Raum der auf $[0, \infty)$ über Norm $\ \cdot\ _p$ integrierbaren \mathbb{R}^n -wertigen Funktionen
$L_{p,e}^n$	der bzgl. L_p^n erweiterte Raum (siehe S. 17)
$C^n(Z)$	Menge der auf Z n -fach stetig differenzierbaren Funktionen
$C_p^n(Z)$	Menge der Funktionen aus $C^{(n-1)}(Z)$, die stückweise n -fach stetig differenzierbar sind
$s : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$	Zufuhr rate dissipativer Systeme („supply rate“, siehe S. 21)
$S : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$	Energiefunktion dissipativer Systeme („energy function“, siehe S. 21)
S_-, S_+	siehe S. 22f
γ, γ^*	Verstärkungsniveau, (minimale) Verstärkung
$\mathbf{\Gamma}^u, \mathbf{\Gamma}^w$	Steuerstrategien bzgl. \mathbf{u} bzw. \mathbf{w} (siehe S. 39)
$(\mathbf{c}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$	Koeffizienten eines Runge-Kutta Verfahrens
$\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t)$	vektorwertiges Polynom, das die Zustandsvariablen \mathbf{x} auf dem Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ komponentenweise interpoliert
ρ	siehe Satz 5.1, S. 80
j	$= \sqrt{-1}$

Für Funktionsauswertungen mit häufig wechselndem Argument ergibt sich die Wertemenge D gemäß

$[t_0, t_1] \times X$	für	$\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ bzw. $\mathbf{r}(t, \mathbf{x})$
$X \times U$	für	$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$
$X \times U \times W$	für	$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$
$X \times X$	für	$\mathbf{r}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$,

und \mathcal{D} analog

$\mathcal{X} \times \mathcal{U}$	für	$\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$
$\mathcal{X} \times \mathcal{U} \times \mathcal{W}$	für	$\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot))$.

Für alle vektorwertig auftretenden Ausdrücke wird ein **fetter** Schriftsatz verwendet. Variablen in normaler Schriftart sind entsprechend eindimensionale Größen.

Indizes werden, soweit dies möglich ist, gleichbedeutend verwendet:

k	zeitabhängige Komponenten (z.B. t_k),
i, j, l	Vektorkomponenten (z.B. $\mathbf{x}_i, \mathbf{u}_j$) und andere Aufzählungen,
\bar{i}, \bar{j}	s. Lemma 5.6, S. 83.

Einleitung

Regelungs- und Steuersysteme treten in vielen wissenschaftlich-technischen Fragestellungen auf. Die Bandbreite der in nahezu alle ingenieurwissenschaftlichen Arbeitsgebiete reichenden Anwendungen ist außerordentlich weit.

Die Untersuchungen dieser Arbeit haben ihren Ursprung in der Fahrzeugdynamik. Im Rahmen eines Projektes der Deutschen Forschungsgemeinschaft wurden Möglichkeiten semi-aktiver Schwingungsdämpfung untersucht. Ausgangspunkt war die Entwicklung von Fahrzeugschwingungsdämpfern mit elektrorheologischen Fluiden. Diese Fluide werden zu den sogenannten *intelligenten Materialien*¹ gezählt und besitzen, bedingt durch ihre chemisch-physikalische Zusammensetzung, elektrisch kontrollierbare rheologische Eigenschaften. Die rheologischen Eigenschaften zeichnen die elektrorheologischen Flüssigkeiten als Binghamfluide aus, d.h. das Fließverhalten ähnelt erst nach Überschreiten einer gewissen Grenzscherspannung dem herkömmlicher Fluide. Bei Anregung durch ein elektrisches Feld kann diese Grenzscherspannung verschoben werden. Die Viskosität wird steuerbar über einen sehr großen Bereich, der in seinen Grenzen als „gewöhnlich“-flüssig beziehungsweise als nahezu fest bezeichnet werden kann. Über elektronische Steuereinheiten können damit mechanische Eigenschaften von Bauteilen - in diesem Fall also der Schwingungsdämpfer - gesteuert werden. Verglichen mit herkömmlichen Techniken, wie etwa hydraulische oder pneumatische

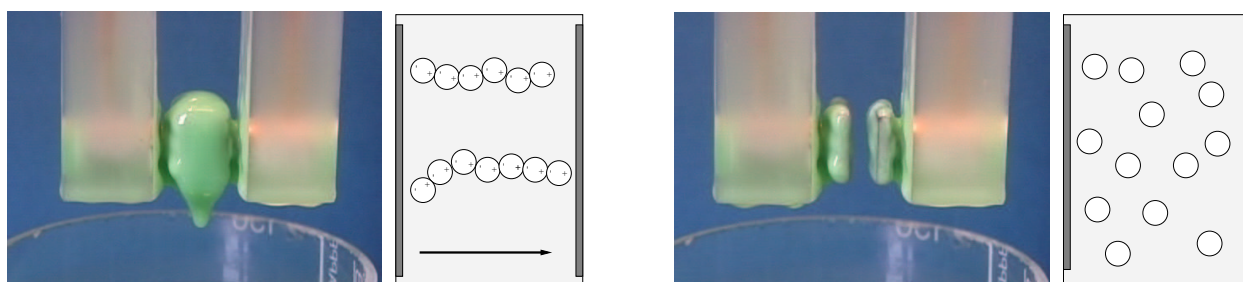


Abbildung 1: Wirkungsweise eines elektrorheologischen Fluids zwischen zwei Elektroden bei anliegendem elektrischen Feld (links) und ohne Anregung (rechts). Das elektrische Feld (Pfeil) regt polarisierbare Partikel innerhalb der nichtleitenden Trägerflüssigkeit zur Kettenbildung an, wobei die Stärke des elektrischen Feldes die Festigkeit der Ketten steuert. Diese bestimmt ihrerseits die Viskositätseigenschaften des elektrorheologischen Fluids in Fließrichtung (senkrecht zur Richtung des elektrischen Feldes).

¹**intelligente Materialien** (engl. „smart materials“) sind Werkstoffe mit herausragenden Materialeigenschaften als Basis für neue innovative Technologien

Bauteile, können die auftretenden Kräfte sehr groß sein und mit hoher Frequenz wirken. Der Entwurf von Regelungen und Steuerungen für semi-aktive Schwingungsdämpfer erfolgt unter Berücksichtigung verschiedener Kriterien.

- Ein wesentliches Kriterium ist die *Stabilität* eines geregelten Systems. Eine in diesem Sinne gutartige Dynamik zeichnet sich dadurch aus, dass das System stets in der Nähe des „idealen“ Zielzustandes verbleibt, bzw. diesem zustrebt.
- Ebenso spielt die *Optimalität* von speziellen Gütekriterien eine große Rolle. Für die gewünschte Steuerung ist eine sinnvolle Wahl der Gütekriterien von erheblicher Bedeutung. Daher ist bereits der Prozess der formalen Beschreibung solcher Gütekriterien im Rahmen der Modellierung ein wichtiger Teil der Untersuchungen.
- In vielen Anwendungen ist es zweckmäßig, die *Robustheit* eines Systems bei der Bewertung von Steuerungen zu berücksichtigen. Vielfach können Störungen des (geregelten) Systems zur Instabilität führen. Daher berücksichtigen Konzepte zur robusten Regelung bzw. Steuerung weitgehend unbekannte Störungen des Systems. Lediglich minimale Kenntnisse über deren Eingriff in das dynamische System und Beschränkungen dürfen vorausgesetzt werden. Daraus entsteht die Notwendigkeit, einen zweckmäßigen Stabilitäts- und Robustheitsbegriff für das untersuchte dynamische System heranzuziehen.

Ein großer Teil dieser Arbeit befasst sich mit *robust-optimalen* Steuerungen im Sinne einer Erweiterung der H_∞ -Regelungen auf allgemeine nichtlineare Systeme. Hier werden unbekannte und unvorhersehbare Störungen des Systems berücksichtigt, von denen lediglich bekannt ist, wie sie auf die Dynamik des Systems wirken und die als energiebeschränkte Signale angenommen werden. Insbesondere letztere inhärente Beschränkung unterscheidet

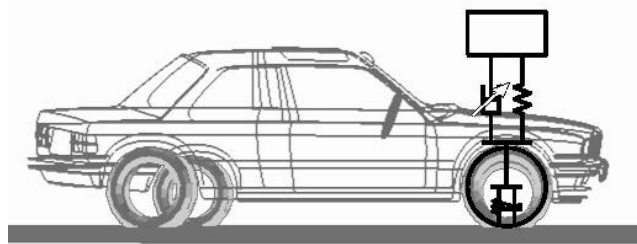


Abbildung 2: Steuerstrategien für semi-aktiv regelbare Fahrwerke haben Kriterien hinsichtlich *Stabilität*, *Robustheit* und *Optimalität* zu erfüllen. Mit geringen Radlastschwankungen, das sind die das Rad auf die Straße drückenden Kräfte, wird **Fahrsicherheit** des Fahrzeugs gewährleistet. Zusätzlich besteht ein großes Interesse an **Fahrkomfort**, gemessen durch die am Fahrzeugaufbau wirkenden Kräfte. Damit gibt es quantifizierbare Kriterien für *optimal* ausgelegte Schwingungsdämpfer. Die Berücksichtigung unbekannter Störungen durch Straßenunebenheiten führt auf *robust-optimale* Steuerstrategien.

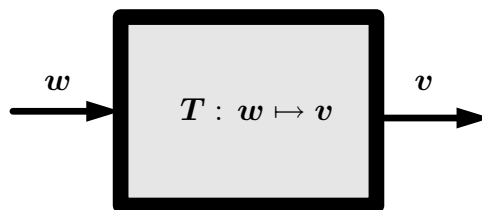


Abbildung 3: Wirkung einer Störung w auf die Ausgabefunktion $v = T(w)$ eines dynamischen Systems.

diesen Robustheitsbegriff von robust-optimalen Steuerungen im Sinne eines reinen Differentialspielansatzes, denn hier müssen Störungen in der Regel durch das Modell beschränkt sein.

Während Stabilität unabdingbare Voraussetzung für jede technische Anwendung ist, sind Optimalität und Robustheit zusätzliche, erweiternde Eigenschaften. Sie stehen sogar in einer gewissen Konkurrenz zueinander. Denn es ist offensichtlich, dass ein sehr robust eingestellter Prozess, der in der Lage sein muss, alle möglichen Fremdeinwirkungen auszuregulieren, weit entfernt ist von einem streng optimal ausgelegten Prozess. Ein Konzept mit variabler Bemessung der Robustheit bietet dagegen die Möglichkeit, zwischen Optimalität und Robustheit zu mitteln. Der maximale zulässige Verstärkungsfaktor

$$\gamma = \max_w \frac{\|T(w)\|_v}{\|w\|_w}$$

ist ein wichtiges Charakteristikum für die Robustheit des Systems. Je kleiner er ist, desto robuster ist das System. Der zulässige Verstärkungsfaktor kann aber auch sehr groß sein und läßt erkennen, dass es sich dann um ein störungsanfälliges System handelt.

Mit dem hier verwendeten Robustheitsbegriff führt die Suche nach einer optimierten robusten Steuerung - der robust-optimalen Steuerung - auf eine *Hamilton-Jacobi-Isaacs-Gleichung*. Es erscheint wenig zweckmäßig, die Lösung der hochdimensionalen partiellen Differentialgleichung berechnen zu wollen. Charakteristiken der Gleichung sind dagegen lokale Trajektorien von Zwei-Personen-Nullsummen-Differentialspielen, die ebenso wie bei einem reinen Differentialspielansatz auf Sattelpunktprobleme führen. In dieser Arbeit werden daher deterministische Trajektorien von lokalen robust-optimalen Steuerungen als Lösung von Sattelpunktproblemen behandelt.

Die numerische Behandlung erfolgt üblicherweise durch eine *indirekte Methode*, d.h. es wird das assoziierte Mehrstufenrandwertproblem der kanonischen Differentialgleichungen numerisch gelöst. Der Einsatz eines *direkten Optimierungsverfahrens* wird möglich, wenn eine spezielle Formulierung dieses Randwertproblems vollständig diskretisiert und an das direkte Optimierungsverfahren angekoppelt wird. Der Vorteil der direkten Verfahren, dass die genaue Schaltstruktur nicht bekannt sein muss, kommt bei der numerischen Berechnung zum Tragen. Dies gilt allerdings nur bedingt. Bei der Formulierung des Randwertproblems hinsichtlich des Sattelpunktproblems wird nur eine der Größen der beiden Akteure Steuerung

oder Störung direkt diskretisiert und durch das Verfahren minimiert. Die Schaltstruktur hinsichtlich der verbleibenden Größe muss in die Dynamik eingebracht werden. Das hier untersuchte Robustheitskonzept sieht allerdings *keine* harten Beschränkungen hinsichtlich der Störung vor, da grundsätzlich die Verstärkung des Systems betrachtet wird. Es sind damit im Modell keine Beschränkungen hinsichtlich der unbekanntenen Störungen enthalten.

Die Arbeit ist in 3 Teile gegliedert. In **Teil I** werden zunächst Stabilitäts- und Robustheitsbegriffe für dynamische Systeme bereitgestellt. Kapitel 2 und 3 behandeln Optimalsteuerungsbeziehungswise Sattelpunktprobleme. Dabei wird jeweils der Zusammenhang zu den Stabilitätskriterien von Kapitel 1 hergestellt. Zudem werden einige Aspekte hinsichtlich notwendiger Bedingungen, Modellierung und spezieller Fragestellungen bei Sattelpunktproblemen erörtert.

Teil II behandelt numerische Verfahren. Hierbei wird mit Blick auf die oben angesprochene spezielle Diskretisierung der notwendigen Bedingungen von Lösungen der Sattelpunktprobleme nicht direkt auf den Zusammenhang zu Sattelpunktproblemen eingegangen. Vielmehr geht es um allgemeine direkte Diskretisierungen und deren Konsistenz im Kontext der Lösung von Optimalsteuerungsproblemen. Es wird aufbauend auf Arbeiten über Runge-Kutta Verfahren und den Zusammenhang zu Kollokationsverfahren eine Konsistenzaussage im Sinne der optimalen Steuerung über eine ganz Klasse von 3-stufigen Kollokationsverfahren bewiesen, wobei sich eine schnelle verbesserte Methode zur Schätzung der adjungierten Variablen ergibt.

In **Teil III** werden konkrete Ergebnisse aus der Arbeit mit semi-aktiven Schwingungsdämpfern mit elektrorheologischen Fluiden vorgestellt. Fragestellungen der Modellierung geeigneter Gütekriterien hinsichtlich Komfort und Fahrsicherheit werden in Abschnitt 7.3 diskutiert. In Abschnitt 7.4 und 8.2 geht es insbesondere um die Applikation eines echtzeitfähigen Regelalgorithmus, der in einer Software-in-the-Loop Simulation implementiert und dort erfolgreich getestet wurde. Die Berechnung allgemeiner nichtlinearer robust-optimaler Steuerungen eines Teilfahrzeugmodells für die Vertikaloszillationen eines Fahrzeugs werden in Abschnitt 7.5 vorgestellt. Abschnitt 8.1 berichtet über das Problem der Parameteridentifizierung eines dynamischen Modells zur Vorhersage des Dämpfungsverhaltens von Schwingungsdämpfern mit elektrorheologischen Fluiden.

Teil I

Theorie der optimalen und robusten Steuerungen

Kapitel 1

Stabilität dynamischer Systeme

Es werden allgemeine dynamische Systeme zur formalen Beschreibung technischer Prozesse betrachtet. Aussagen über die Stabilitätseigenschaften solcher Systeme erläutern die Wirkungsweise von Regelungen und Steuerungen.

1.1 Dynamische Systeme

Eine große Klasse der in der Praxis auftretenden technischen Prozesse werden durch explizite Differentialgleichungen

$$(1.1) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

erfasst. Dabei wird $\mathbf{x} \in X$, $X \subset \mathbb{R}^{n_x}$ als **Zustandsvariable** bezeichnet. Unter bestimmten Voraussetzungen an die rechte Seite von (1.1) können Aussagen über die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung gewonnen werden.

Satz 1.1¹ *Auf dem Streifen $S = \{(t, \mathbf{x}) \mid t \in [t_0, t_f], \mathbf{x} \in X\}$ sei $\mathbf{f} \in C(S)$ und existiere eine Konstante L derart, dass*

$$(1.2) \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| \leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|$$

für alle $(t, \mathbf{x}) \in S$ (Lipschitzbedingung). Dann existiert für jedes $(t_0, \mathbf{x}_0) \in S$ genau eine auf $[t_0, t_f]$ stetig differenzierbare Funktion $\mathbf{x}(t)$, für welche die Differentialgleichung (1.1) erfüllt ist.

Beweis: siehe [118].

Bemerkung 1.2 (vgl. [118])

- (i) Es genügt, wenn die Lipschitzbedingung für jeden Punkt $(t, \mathbf{x}) \in S$ lokal, d.h. in einer Umgebung $U(t, \mathbf{x})$, erfüllt wird.

¹*Satz von Picard/Lindelöf*, E. Picard, 1856-1941, E. Lindelöf, 1870-1946

- (ii) Der Mittelwertsatz liefert die lokale Lipschitzbedingung, wenn die stetige Ableitung \mathbf{f}_x existiert und stetig ist, wenn also $\mathbf{f} \in C^1(S)$.
- (iii) Falls nur die Stetigkeit von \mathbf{f} auf S gegeben ist, lässt sich die Existenz einer Lösung beweisen².

Bei technischen Anwendungen ist Stetigkeit bzw. stückweise Stetigkeit der rechten Seite in aller Regel gegeben, ebenso wie die Differenzierbarkeit bzw. stückweise Differenzierbarkeit³ nach \mathbf{x} . Es ist jedoch möglich, dass die Ableitung für gewisse Zustandswerte unbeschränkt ist. Hier müssen die Betrachtungen auf eine Umgebung des Anfangszustandes \mathbf{x}_0 beschränkt werden (vgl. [106]).

Das zeitliche Verhalten der Zustandsgrößen technischer Prozesse muss durch Steuerungen und Regelungen in geeigneter Weise beeinflusst werden. Folgender Satz gibt Auskunft darüber, wie sich die Eigenschaften des Systems vermöge der rechten Seite \mathbf{f} auf das Verhalten der Zustandsgrößen auswirken.

Satz 1.3 Seien \mathbf{f}, \mathbf{g} stetig auf $S = \{(t, \mathbf{x}) \mid t \in [a, b], \mathbf{x} \in X\}$, X offen, und es gelte dort

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{g}(t, \mathbf{x})\| &\leq d \\ \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_1) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}_2)\| &\leq L\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|. \end{aligned}$$

Dann erhält man für Lösungen $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ und $\mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0)$ der Anfangswertprobleme

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) & \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{z}} &= \mathbf{g}(t, \mathbf{z}) & \mathbf{z}(t_0) &= \mathbf{z}_0 \end{aligned}$$

mit $(t_0, \mathbf{x}_0), (t_0, \mathbf{z}_0) \in S$ die Abschätzung

$$(1.4) \quad \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) - \mathbf{z}(t; \mathbf{z}_0)\| \leq \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{z}_0\| e^{L|t-t_0|} + \frac{d}{L} (e^{L|t-t_0|} - 1).$$

Beweis: siehe [118].

Bemerkung 1.4 (vgl. [118])

- (i) Der erste Summand der Gleichung (1.4) steht für eine stetige Abhängigkeit des Zustandsverlaufes von den Startwerten des dynamischen Prozesses, wohingegen der zweite Summand den Fehler einer Veränderung der dynamischen Gleichungen abschätzt, was etwa durch Fehler der Prozessdaten verursacht wird.
- (ii) Falls für $\mathbf{f} \in C^1(S)$ die Jacobimatrix \mathbf{f}_x auf S beschränkt ist, lässt sich die Abhängigkeit der Zustandsvariablen von den Anfangswerten $\mathbf{W}(t) = \partial \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) / \partial \mathbf{x}_0$ quantifizieren durch die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}(t) = \mathbf{f}_x(t, \mathbf{x}) \mathbf{W}(t), \quad \mathbf{W}(t_0) = \mathbf{I}.$$

- (iii) Die Abschätzung (1.4) ist für die meisten Probleme deutlich zu pessimistisch, kann jedoch in ihrer Allgemeinheit nicht verbessert werden.

²Satz von Peano, G. Peano, 1858-1932

³Damit Satz 2 angewendet werden kann, muss \mathbf{f} an den Sprungstellen formal stetig fortsetzbar sein.

1.2 Stabilität

Die Aussagen des vorhergehenden Abschnittes geben bislang noch kein zufriedenstellendes Kriterium für ein im regelungstechnischen Sinne gutartiges Verhalten eines Prozesses wieder. Zur Verdeutlichung sei folgendes Beispiel angeführt.

Beispiel 1.5 Die skalaren Differentialgleichungen

$$\dot{x}_1(t) = e^t, \quad x_1(0) = x_0, \quad \dot{x}_2(t) = e^{-t}, \quad x_2(0) = x_0,$$

führen auf

$$x_1(t; x_0) = x_0 e^t, \quad x_2(t; x_0) = x_0 e^{-t}.$$

Eine Störung des Anfangswertes $x_0 + \delta$ hat auf beide Systeme sehr unterschiedliche Auswirkungen. Mit

$$\Delta_{x_1}(t) = x_1(t; x_0 + \delta) - x_1(t; x_0) = \delta e^t \quad \Delta_{x_2}(t) = x_2(t; x_0 + \delta) - x_2(t; x_0) = \delta e^{-t}$$

wird der Fehler $\Delta_{x_2}(t)$ gedämpft und konvergiert sehr schnell gegen 0, dagegen wächst $\Delta_{x_1}(t)$ auch bei kleinsten Störungen für $t \rightarrow \infty$ über alle Schranken.

Die Gutartigkeit eines Systems wird also durch seine Eigenschaft bestimmt, auf Störungen mehr oder weniger anfällig zu reagieren. In diesem Sinne ist die Stabilität folgendermaßen definiert:

Definition 1.6 (Stabilität, asymptotische Stabilität)

Sei $\mathbf{x}(t)$ auf $0 \leq t < \infty$ Lösung des Systems (1.1), desweiteren gelte

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{z}).$$

Dabei sei $\mathbf{f} \in C(S_\alpha)$ mit $S_\alpha = \{(t, \mathbf{z}) \mid t \in [0, \infty), \|\mathbf{z} - \mathbf{x}(t)\| < \alpha\}$. Die Lösung $\mathbf{x}(t)$ heißt **stabil**, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad \|\mathbf{z}(0) - \mathbf{x}(0)\| < \delta \implies \|\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)\| < \varepsilon \quad \text{für } 0 \leq t < \infty.$$

Sie wird **asymptotisch stabil** genannt, wenn sie stabil ist und ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $\mathbf{z}(t)$ mit $\|\mathbf{z}(0) - \mathbf{x}(0)\| < \delta$ gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\mathbf{z}(t) - \mathbf{x}(t)\| = 0.$$

Wenn die Lösung $\mathbf{x}(t)$ nicht stabil ist, heißt sie **instabil**.

Bemerkung 1.7 (vgl. [118])

- (i) Offenbar ist x_1 aus Beispiel 1.5 instabil, x_2 dagegen stabil.
- (ii) Die Definition der Stabilität auf einem Intervall $[t_0, \infty)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, ist äquivalent zu der oben angegebenen, wenn \mathbf{f} in \mathbf{x} auf S_α lokal lipschitzstetig im Sinne der Bemerkung 1.2(i) ist.

(iii) Für ein dynamisches System mit stabiler Nulllösung gilt

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}.$$

Umgekehrt können Nulllösungen mit dieser Eigenschaft aber auch instabil sein. In beiden Fällen wird von einer **Gleichgewichtslage** oder **Ruhelage** gesprochen.

- (iv) Durch die Erweiterung $\mathbf{z}^T = (\mathbf{x}^T, t)$ kann stets aus einem allgemeinen dynamischen System gemäß Gleichung (1.1) wegen $\dot{\mathbf{z}}^T = (\dot{\mathbf{x}}^T, 1) = (\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)^T, 1) = \mathbf{h}(\mathbf{z})^T$ mit Anfangswert $\mathbf{z}_0^T = (\mathbf{x}_0^T, t_0)$ ein autonomes, d.h. zeitinvariantes dynamisches System erzeugt werden. Ein Bezug auf autonome Systeme ist demnach keine Einschränkung der Allgemeinheit.
- (v) Ein autonomes System mit stabiler Lösung $\mathbf{x}_s(t)$ lässt sich allgemein durch eine Substitution der Art $\mathbf{z}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_s(t)$ auf ein System $\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{h}(\mathbf{z})$ mit stabiler Lösung $\mathbf{z}(t) \equiv \mathbf{0}$ transformieren. Deshalb werden im Folgenden nur noch Systeme mit stabilen Nulllösungen betrachtet.

Technische Prozesse werden dem Systemcharakter folgend stets in einen stabilen Zustand laufen, sofern es einen gibt und der Anfangswert in dessen Einzugsbereich liegt. Das wichtigste Anliegen wird es demnach sein, mit Hilfe einer regelnden Größe ein System derart zu modifizieren, dass es einen geeigneten stabilen Zustand erhält.

1.2.1 Lyapunovfunktionen

Ein nützliches und sehr aussagekräftiges Kriterium für Stabilität bzw. Instabilität ist die **direkte Methode von Lyapunov**⁴. Betrachtet werde das System

$$(1.5) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ und $\mathbf{0} \in X$. Damit ist die Nulllösung eine Ruhelage und mithin ein Kandidat für eine stabile Lösung. Die Frage, unter welchen Bedingungen das System tatsächlich stabil ist, wird durch folgenden Satz beantwortet.

Satz 1.8 (Stabilitätssatz) *Der Gleichgewichtszustand $\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{0}$ des Systems (1.5) ist stabil, falls es eine reellwertige Funktion $V \in C^1(\mathbb{R}^{n_x})$ gibt, die folgenden Bedingungen auf dem Gebiet $X \subset \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{0} \in X$ genügt:*

- (I) $V(\mathbf{0}) = 0$,
- (II) $V(\mathbf{x}) > 0$ für alle $\mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}$,
- (III) $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ für alle $\mathbf{x} \in X$,

⁴A.M. Lyapunov (Александр Михайлович Ляпунов), 1857-1918

wobei

$$\dot{V}(\mathbf{x}) := \left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

entlang der Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ definiert ist.

Die Lösung ist asymptotisch stabil, falls

$$(IVa) \quad \dot{V}(\mathbf{x}) \equiv 0 \implies \mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0},$$

oder restriktiver

$$(IVb) \quad \dot{V}(\mathbf{x}) < 0 \text{ für alle } \mathbf{x} \in X \setminus \{\mathbf{0}\}.$$

Beweis: siehe [118, 61, 111].

Definition 1.9

C^1 -Funktionen, welche die Eigenschaften (I)-(III) des Satzes 1.8 erfüllen, heißen **Lyapunovfunktionen**.

Lyapunovfunktionen sind damit Potentiale des Zustandes \mathbf{x} und können als Hyperflächen im $\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}$ betrachtet werden. Die Untersuchung des Stabilitätsverhaltens der Trajektorien $\mathbf{x}(t)$ werden reduziert auf das Monotonieverhalten der Richtungsableitungen $\dot{V}(\mathbf{x})$ entlang der Trajektorien. Entsprechend ergibt sich folgender

Satz 1.10 (Instabilitätssatz) Sei $V \in C^1(X)$, $X \subset \mathbb{R}^{n_x}$, $V(\mathbf{0}) = 0$ und $V(\mathbf{x}_k) > 0$ für eine Folge \mathbf{x}_k aus $X \setminus \{\mathbf{0}\}$ mit $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{0}$. Ist $\dot{V} > 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ in X , so ist die Lösung instabil.

Beweis: siehe [118, 61, 111].

Beispiel 1.11 Betrachtet wird das Schwingungsverhalten

$$\ddot{x} + a\dot{x} + b \sin x = 0, \quad x(0) = x_0, \quad \dot{x}(0) = 0$$

eines gedämpften mathematischen Pendels mit $a, b > 0$ und $|x| < \pi$. Mit der Energiesumme

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x b \sin \xi \, d\xi = \frac{\dot{x}^2}{2} + b(1 - \cos x) > 0 \quad \text{für } x\dot{x} \neq 0, \quad |x| < \pi$$

als Lyapunovfunktion erhält man

$$\dot{E}(x, \dot{x}) = -a\dot{x}^2 \leq 0$$

und damit die Stabilität des Systems. Es sei bemerkt, dass die offensichtlich bestehende asymptotische Stabilität hieraus nicht abzuleiten ist, da $\dot{E}(x, 0) = 0$ ist. Es kann aber gezeigt werden, dass stets $\lim_{t \rightarrow \infty} E(x(t), \dot{x}(t)) = 0$, woraus die gesuchte Eigenschaft folgt (s. [118]).

Allgemein sind Lyapunovfunktionen nicht eindeutig. Tatsächlich erweist sich die Suche nach solchen Funktionen gerade für große, komplexe Systeme als äußerst mühsame Aufgabe, da es kein allgemeines konstruktives Verfahren gibt. Die praktische Anwendbarkeit von Lyapunovfunktionen ist in der Regel beschränkt auf Systeme mit speziellen Strukturen, wie etwa lineare Systeme, Gradientensysteme oder Hamiltonsche Systeme oder beruht auf Linearisierungen von Systemen um eine Ruhelage.

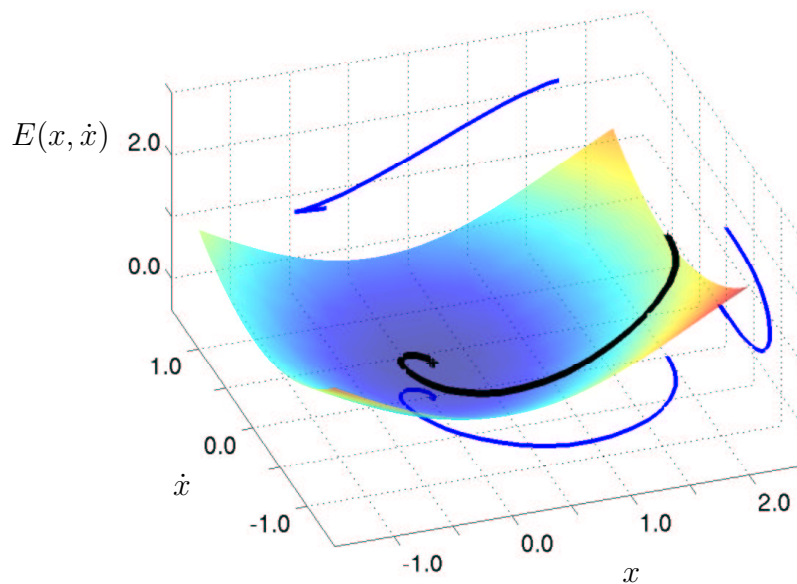


Abbildung 1.1: Lyapunovfunktion $E(x, \dot{x})$ und Trajektorie $(x(t), \dot{x}(t))$ zum Beispiel 1.11

1.2.2 Linearisierung

Die Stabilitätsaussagen der Definition 1.6 lassen sich für lineare Systeme präzisieren.

Definition 1.12

Betrachtet wird folgendes **lineare** System von Differentialgleichungen

$$(1.6) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t), \quad t \geq 0$$

mit $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Es wird als **zeitinvariant** bezeichnet, falls $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n_x}$ konstant sind. Die Gleichung ist eine **homogene Differentialgleichung**, wenn $\mathbf{b}(t) \equiv \mathbf{0}$ ist und wird in diesem Fall durch die **homogene Lösung** erfüllt.

Die Struktur der Fundamentallösungen linearer Differentialgleichungen führt auf die Stabilitätsaussagen des folgenden Satzes.

Satz 1.13 Sei $\mathbf{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ die Nulllösung des linearen Systems $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}$, d.h. der homogenen Differentialgleichung von (1.6). Dann ist $\mathbf{x}(t)$ stabil, wenn jede Lösung auf $[0, \infty)$ beschränkt ist. Sie ist asymptotisch stabil, wenn jede Lösung der homogenen Gleichung für $t \rightarrow \infty$ gegen $\mathbf{0}$ konvergiert. Gibt es eine unbeschränkte Lösung auf $[0, \infty)$, dann ist die Nulllösung instabil.

Beweis: siehe [118].

Bemerkung 1.14 Die Stabilitätseigenschaft der Nulllösung eines homogenen Systems überträgt sich auf jede Gleichgewichtslage eines entsprechenden inhomogenen Systems. Daher spricht man bei linearen Systemen gleichermaßen von der Stabilität des Systems selbst.

Satz 1.15 Die Nulllösung linearer zeitinvarianter Systeme $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$ ist

asymptotisch stabil \iff die Realteile aller Eigenwerte von \mathbf{A} sind negativ,

stabil \iff die Realteile aller Eigenwerte von \mathbf{A} sind nichtpositiv und diejenigen Eigenwerte, deren Realteile verschwinden, sind halbeinfach⁵

instabil \iff sie ist nicht stabil

Instabilität ergibt sich demnach sofort, wenn es einen Eigenwert mit positivem Realteil gibt.

Beweis: siehe [118].

Die Stabilitätseigenschaft eines nichtlinearen Systems kann auf Eigenschaften des linearisierten Systems zurückgeführt werden.

Satz 1.16 Betrachtet wird das System

$$(1.7) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{g}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{x}(t) \in X$, $\mathbf{0} \in X$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ sowie $\mathbf{g} \in C(X)$ mit der Eigenschaft

$$(1.8) \quad \lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\|\mathbf{g}(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = 0.$$

Für die Gleichgewichtslage $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ des Systems (1.7) gilt:

die Realteile aller Eigenwerte von \mathbf{A} sind negativ $\implies \mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ ist asymptotisch stabil,

es gibt einen Eigenwert von \mathbf{A} mit positivem Realteil $\implies \mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ ist instabil.

Beweis: siehe [118].

Bemerkung 1.17 Obwohl die Bedingung (1.8) den nichtlinearen Anteil sehr restriktiv einschränkt, zeigt folgende Überlegung die Bedeutung des Satzes 1.16. Sei $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ Gleichgewichtslage des nichtlinearen Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

mit $\mathbf{f} \in C^1(D)$ und $D \subset X$ eine Umgebung von $\mathbf{0}$. Dann folgt durch Taylorentwicklung

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{0}) + \mathbf{f}_x(\mathbf{0})\mathbf{x} + \mathbf{r}(\mathbf{x})$$

und es gilt

$$\mathbf{r}(\mathbf{x}) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{0}) - \mathbf{f}_x(\mathbf{0})\mathbf{x} = \mathcal{O}(\|\mathbf{x}\|^2) \implies \frac{\mathbf{r}(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|} \xrightarrow{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0}} \mathbf{0}.$$

Die linearisierte Gleichung hat wegen $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ die Gestalt des Systems aus Satz 1.16. Damit können die Kriterien für asymptotische Stabilität und Instabilität linearer Systeme in einer Umgebung der Gleichgewichtslage auf das nichtlineare System angewendet werden.

⁵ *halbeinfach* sind solche Eigenwerte, deren algebraische und geometrische Vielfachheit übereinstimmen

Beispiel 1.18 Betrachtet werde das linearisierte System aus Beispiel 1.11

$$\dot{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b & -a \end{pmatrix} \mathbf{x},$$

es besitzt genau für $a, b > 0$ Eigenwerte auf der linken \mathbb{C} -Halbebene und damit asymptotisch stabiles Verhalten.

1.2.3 Einzugsbereich stabiler Lösungen

Eine wichtige Fragestellung bei der Beurteilung dynamischer Systeme ist die maximale Größe des zulässigen Definitionsbereichs $X \subset \mathbb{R}^{n_x}$ auf dem ein dynamisches System operiert, ohne dort instabiles Verhalten zu zeigen. Bisher wurde angenommen, dass im Falle einer stabilen Lösung diese Eigenschaft global auf X gilt. Dieser Fall ist bereits dann nicht möglich, wenn das System mehrere lokal asymptotisch stabile Ruhelagen besitzt.

Es ist also zu untersuchen, für welche Anfangswerte $\mathbf{x}_0 \in X$ der Zustand $\mathbf{x}(t)$ gegen eine asymptotisch stabile Ruhelage $\mathbf{x}_s \equiv \mathbf{0}$ konvergiert. Sei

$$(1.9) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

mit $\mathbf{f}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, $\mathbf{0} \in X$ und $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ die Lösung von (1.9) abhängig von Startwert \mathbf{x}_0 . Dann bezeichnet

$$(1.10) \quad \mathcal{E} = \{ \mathbf{z} \in X \mid \lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t; \mathbf{z}) = \mathbf{0} \}$$

den **Einzugsbereich** der Ruhelage $\mathbf{0}$.

Die exakte Berechnung solcher Einzugsgebiete ist praktisch nicht möglich. Dagegen beschreibt der folgende Satz, wie Einzugsgebiete von Ruhelagen abgeschätzt werden können.

Satz 1.19⁶ Sei $V \in C^1(\mathbb{R}^{n_x})$ reellwertig und $\mathcal{E}_c = \{ \mathbf{x} \in X \mid V(\mathbf{x}) < c \} \subset \mathbb{R}^{n_x}$ beschränkt und es gelte dort

$$(I) \quad V(\mathbf{x}) > 0 \quad \text{für } \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

$$(II) \quad \dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0.$$

Weiterhin sei $N \subset \mathcal{E}_c$ die Menge aller Punkte mit $\dot{V}(\mathbf{x}) = 0$ und $Z \subset \mathcal{E}_c$ die größte invariante⁷ Teilmenge von N . Dann ist Z nicht leer und \mathcal{E}_c ist eine Teilmenge des Einzugsbereiches \mathcal{E} von Z .

Beweis: siehe [118, 61, 111].

Bemerkung 1.20

- (i) Die in Satz 7 gegebene Schätzung \mathcal{E}_c des Einzugsbereiches \mathcal{E} hängt in der Praxis von der Wahl einer Lyapunovfunktion V ab. Sie ist damit gegebenenfalls sehr pessimistisch.

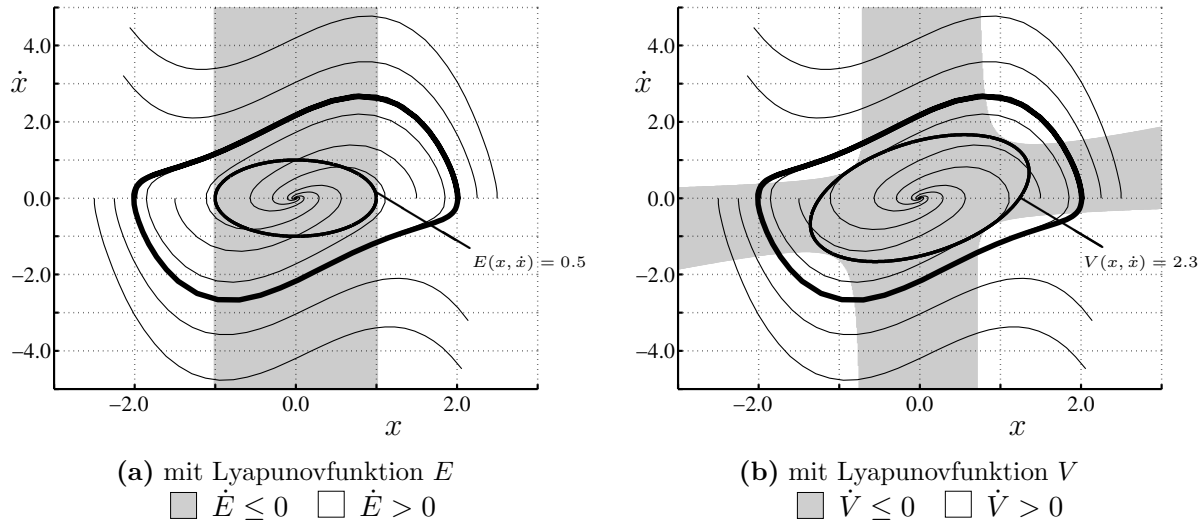


Abbildung 1.2: Trajektorien (schmale Linien), berechnete Stabilitätsgebiete und tatsächliches Einzugsgebiet (fette Linie) des lokal asymptotisch stabilen Nullpunktes von Beispiel 1.21.

(ii) Ist die größte invariante Menge $Z = \{0\}$, so ist die Ruhelage asymptotisch stabil.

Beispiel 1.21 Für das System $\ddot{x} + (1 - x^2)\dot{x} + x = 0$ ist

$$E(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2} + \int_0^x \xi \, d\xi = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + x^2) \quad \implies \quad \dot{E}(x, \dot{x}) = (x^2 - 1)\dot{x}^2.$$

E ist also Lyapunovfunktion. Damit sind die Mengen \mathcal{E}_c in der (x, \dot{x}) -Ebene die konzentrischen Kreisflächen um $(0, 0)$ mit $E(x, \dot{x}) \leq c$, d.h. $\dot{x}^2 + x^2 \leq 2c^2$. Für $|x| \leq 1$ ist $\dot{E}(x, \dot{x}) \leq 0$ und $(x, \dot{x}) = (0, 0)$ ist invariante Menge der Punkte mit $\dot{E}(x, \dot{x}) = 0$, womit die Nulllösung lokal asymptotisch stabil ist. Die beste Schätzung des Einzugsbereiches ist der größte Kreis, welcher die Bedingung $\dot{E}(x, \dot{x}) = (x^2 - 1)\dot{x}^2 \leq 0$ erfüllt, d.h. für $2c^2 = 1$ (vgl. Abbildung 1.2(a)).

Die Abhängigkeit dieses Verfahrens von der gewählten Lyapunovfunktion zeigt folgende Wahl (siehe [111])

$$V(x, \dot{x}) = \frac{1}{2}(3x^2 + 2x\dot{x} + 2\dot{x}^2),$$

was offenbar eine bessere Schätzung ergibt, denn mit

$$\dot{V}(x, \dot{x}) = (x^2 - 1)\dot{x}^2 - (x\dot{x} - 1)x^2$$

erhalten wir nach einiger Rechnung eine deutlich größere Teilmenge \mathcal{E}_c des Einzugsbereiches \mathcal{E} (vgl. Abbildung 1.2(b)).

⁶S. Lefschetz, 1884-1972

⁷Eine Menge $Z \subset N$ heißt *invariant*, wenn gilt: $\mathbf{x}_0 \in Z \implies \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0) \in Z$ für alle $t \in (-\infty, \infty)$.

Bemerkung 1.22⁸ (siehe [111] und Abschnitt 2.4) Eine in gewissem Sinne optimale Lyapunovfunktion, welche auf Satz 7 angewendet das Einzugsgebiet einer lokal asymptotisch stabilen Nulllösung vollständig charakterisiert, wird implizit durch die partielle Differentialgleichung

$$(1.11) \quad \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}) = -\psi(\mathbf{x}) (1 - V(\mathbf{x}))$$

gegeben. Die Gleichung wird von einer Lyapunovfunktion $V : \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$ mit $\dot{V}(\mathbf{x}) \leq 0$ auf \mathcal{E} erfüllt, falls die Lösungen $\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0)$ auf $[0, \infty]$ existieren und $\psi(\mathbf{x}) \in C(X)$ reellwertig und positiv definit ist. Es gilt dann $V(\mathbf{x}) = 1$ auf dem Rand $\partial\mathcal{E}$.

1.3 L-Stabilität

Es werden Systeme als Operatoren betrachtet, welche Eingangssignale \mathbf{w} auf Ausgangssignale $\mathbf{x} = \mathbf{T}(\mathbf{w})$ abbilden, ohne deren tatsächliche Struktur zu kennen. Die Größen \mathbf{w} und \mathbf{x} operieren in „Signalräumen“.

Definition 1.23

Für $p \in \mathbb{N}$ sei der **Signalraum** $L_p^{n_w}$ die Menge aller messbaren Funktionen $\mathbf{w} : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n_w}$ mit

$$\|\mathbf{w}\|_{L_p} = \left(\int_0^\infty \|\mathbf{w}(t)\|^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

sowie der **erweiterte Raum** $L_{p,e}^{n_w} = \{\mathbf{w} \mid \mathbf{w}_\tau \in L_p^{n_w} \text{ für } \tau \geq 0\}$ mit

$$\mathbf{w}_\tau(t) = \begin{cases} \mathbf{w}(t) & , \quad 0 \leq t \leq \tau \\ \mathbf{0} & , \quad t > \tau. \end{cases}$$

Ein Operator \mathbf{T} heißt **kausal**, wenn $(\mathbf{T}(\mathbf{w}))_\tau = (\mathbf{T}(\mathbf{w}_\tau))_\tau$ für alle $\tau \in [0, \infty)$ gilt.

Der erweiterte Raum erlaubt die Auswertung von instabilen Systemen mit unbeschränkt wachsenden Ausgangssignalen. Die Kausalität von Systemen bedeutet, dass ein Ausgabe-signal zu einem bestimmten Zeitpunkt nur von den bis dahin erfolgten Eingabesignalen abhängen kann. Sie ist eine den hier betrachteten dynamischen Systemen inhärente Eigenschaft und kann als gegeben vorausgesetzt werden.

Definition 1.24 (L-stabil, beschränkt-verstärkend L-stabil)

Ein Operator $\mathbf{T} : L_{p,e}^{n_w} \rightarrow L_{p,e}^{n_x}$ ist **L-stabil**, falls es ein reellwertiges $\beta \geq 0$ und ein streng monoton wachsendes, nichtnegatives $\alpha \in C([0, \infty))$ mit $\alpha(0) = 0$ gibt, so dass

$$(1.12) \quad \|\mathbf{T}(\mathbf{w})_\tau\|_{L_p} \leq \alpha(\|\mathbf{w}_\tau\|_{L_p}) + \beta \quad \forall \mathbf{w} \in L_p^{n_w}, \tau \geq 0.$$

Gibt es insbesondere ein reellwertiges $\gamma \geq 0$, so dass

$$(1.13) \quad \|\mathbf{T}(\mathbf{w})_\tau\|_{L_p} \leq \gamma \|\mathbf{w}_\tau\|_{L_p} + \beta \quad \forall \mathbf{w} \in L_p^{n_w}, \tau \geq 0,$$

⁸ „Zubov’s theorem“, V.I. Zubov (В.И. Зубов)

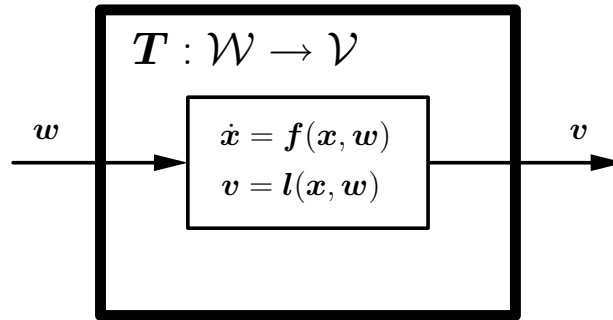


Abbildung 1.3: Das dynamische System (1.14) wird als Abbildung $T : \mathcal{W} \rightarrow \mathcal{V}$ betrachtet.

dann heißt T **beschränkt-verstärkend L-stabil**⁹. Falls der Wert

$$\gamma^* = \inf\{\gamma \mid \text{Gleichung (1.13) ist erfüllt}\}$$

existiert, so heißt er **Verstärkung** des Systems.

Ist eine der beiden beschriebenen Eigenschaften erfüllt, jedoch nur für Eingangssignale $\mathbf{w} \in L_{p,e}^{n_w}$ mit $0 < \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\mathbf{w}(t)\| \leq r < \infty$, so heißt T **L-stabil** bzw. **beschränkt-verstärkend L-stabil für kleine Signale**.

Bemerkung 1.25

(i) Für kausale Systeme ist Gleichung (1.13) äquivalent zu

$$\|T(\mathbf{w})\|_{L_p} \leq \gamma \|\mathbf{w}\|_{L_p} + \beta \quad \forall \mathbf{w} \in L_p^{n_w},$$

denn einerseits ist $L_p^{n_w} \subset L_{p,e}^{n_w}$, andererseits gilt für kausale Systeme

$$\|T(\mathbf{w})_\tau\|_{L_p} = \|T(\mathbf{w}_\tau)_\tau\|_{L_p} \leq \|T(\mathbf{w}_\tau)\|_{L_p} \leq \gamma \|\mathbf{w}_\tau\|_{L_p} + \beta.$$

(ii) Wählt man den Raum L_∞ , so erhält man mit $\|\mathbf{w}\|_{L_\infty} = \sup_{t \geq 0} \|\mathbf{w}(t)\|$ die in der Literatur häufig erwähnte **BIBO-Stabilität**¹⁰.

Es stellt sich die Frage, welcher Zusammenhang zum Stabilitätsbegriff aus Definition 1.6 besteht. Hierfür wird folgendes dynamische System betrachtet:

$$(1.14) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}), & \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \\ \mathbf{v} &= \mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Für einen gegebenen Anfangswert \mathbf{x}_0 definiert das System eine Abbildung T , welche einem Eingangssignal $\mathbf{w} \in \mathcal{W} = L_p^{n_w}$ ein Ausgangssignal $\mathbf{v} \in \mathcal{V} \subset L_p^{n_v}$ zuordnet. Die Trajektorien der Zustandsvariablen \mathbf{x} bleiben dem „Betrachter von außen“ verborgen. Zur Absicherung der Existenz der Trajektorien wird angenommen, dass \mathbf{f} lipschitzstetig in (\mathbf{x}, \mathbf{w}) ist, sowie

⁹ **beschränkt-verstärkend L-stabil** engl. „finite-gain L-stable“

¹⁰ **BIBO-Stabilität** engl. „bounded input/bounded output-stability“

l stetig in (\mathbf{x}, \mathbf{w}) ist. Weiterhin sei der Punkt $(\mathbf{0}, \mathbf{0})$ in $X \times W$ enthalten und $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ eine Ruhelage des ungestörten Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0}),$$

d.h. insbesondere $\mathbf{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Satz 1.26 *Unter den oben genannten Voraussetzungen und der zusätzlichen Annahme für das Ausgangssignal*

$$(1.15) \quad \|\mathbf{v}(t)\| \leq \alpha_1(\|\mathbf{x}(t)\|) + \alpha_2(\|\mathbf{w}(t)\|) + \eta$$

mit stetigen, streng monoton wachsenden Funktionen α_i , $\alpha_i(0) = 0$ ($i = 1, 2$) und $\eta \geq 0$ ist das System (1.14) L-stabil für kleine Signale bzgl. der L_∞ -Norm.

Beweis: Zur Untersuchung der benachbarten Trajektorie

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$$

für ein gegebenes Eingangssignal $\mathbf{w} \in \mathcal{W}_r = \{\mathbf{w} \mid 0 < \sup_{0 \leq t \leq \tau} \|\mathbf{w}(t)\| \leq r\}$ betrachten wir

$$\|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w})\| \leq L_w \cdot r$$

als beschränkte Störung im Sinne der Gleichung (1.3). Diese Abschätzung ist gültig, da \mathbf{f} lipschitzstetig bzgl. \mathbf{w} ist. Es folgt bei Berücksichtigung der Lipschitzstetigkeit bzgl. \mathbf{x} mit Lipschitzkonstante L_x sowie der Sätze 1.3 und 1.8 für $\|\mathbf{x}_0\| < \delta$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{w}) - \mathbf{0}\| &= \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{w}) - \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) + \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) - \mathbf{0}\| \\ &\leq \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{w}) - \mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{0})\| + \|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{0}) - \mathbf{0}\| \\ &< \frac{L_w \cdot r}{L_x} (e^{L_x |t-t_0|} - 1) + e^{L_x |t-t_0|} \|\mathbf{x}_0 - \mathbf{0}\| \\ &= \alpha(r) + \varepsilon(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

wobei α stetig und streng monoton wachsend ist mit $\alpha(0) = 0$, sowie $\varepsilon(\mathbf{x}_0) \xrightarrow{\mathbf{x}_0 \rightarrow \mathbf{0}} 0$. Dann ist wegen $\alpha_1(a+b) \leq \alpha_1(2a) + \alpha_1(2b)$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}_\tau(t)\| &\leq \alpha_1(\|\mathbf{x}(t; \mathbf{x}_0, \mathbf{w})\|) + \alpha_2(\|\mathbf{w}(t)\|) + \eta \\ &\leq \alpha_1(2\alpha(r)) + \alpha_2(\|\mathbf{w}(t)\|) + \alpha_1(2\varepsilon(\mathbf{x}_0)) + \eta \\ &\leq \alpha_1(2\alpha(\|\mathbf{w}_\tau\|_{L_\infty})) + \alpha_2(\|\mathbf{w}_\tau\|_{L_\infty}) + \alpha_1(2\varepsilon(\mathbf{x}_0)) + \eta, \end{aligned}$$

und es folgt

$$\|\mathbf{v}_\tau\|_{L_\infty} \leq \alpha^*(\|\mathbf{w}_\tau\|_{L_\infty}) + \eta^*.$$

Das System ist L-stabil für kleine Signale bzgl. der L_∞ -Norm.

Bemerkung 1.27 Falls in Gleichung (1.15) $\eta = 0$ und das ungestörte Problem asymptotisch stabil ist, also obiges $\varepsilon \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$, dann folgt $\eta^* \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$. In diesem Fall heißt das System **lokal Eingang-zu-Ausgang-stabil**¹¹

¹¹lokal Eingang-zu-Ausgang-stabil engl. „input-to-output-stable“

1.3.1 Systeme des L_2

Der Spezialfall L-stabiler Systeme des L_2 spielt in der Anwendung eine bedeutende Rolle. Die Norm

$$(1.16) \quad \|\mathbf{w}_\tau\|_{L_2} = \left(\int_0^\tau \mathbf{w}^T(t)\mathbf{w}(t) dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

repräsentiert ein Maß für die Energie des Signals und garantiert im Fall beschränkt-verstärkender L-Stabilität bzgl. der L_2 -Norm energiebeschränkte Ausgangssignale.

Folgender Satz stellt den Zusammenhang zur klassischen linearen Regelungstechnik her:

Satz 1.28 Für das lineare, zeitinvariante System

$$(1.17) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{w} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{w} \end{aligned}$$

mit Stabilitätsmatrix \mathbf{A} und Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D}$ ist die Verstärkung bzgl. des L_2 gegeben durch $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2$

Beweis: siehe [61].

Bemerkung 1.29 Die Übertragungsfunktion $\mathbf{G}(s)$ des linearen Systems ist so konstruiert, dass die *Laplace-transformierte* des Eingangssignals

$$\mathbf{W}(s) = \int_0^\infty \mathbf{w}(t)e^{-st} dt$$

gemäß

$$\mathbf{V}(s) = \mathbf{G}(s)\mathbf{U}(s)$$

auf die Laplacetransformierte des Ausgangssignals abgebildet wird. Diese allgemeine Vorgehensweise bei linearen zeitinvarianten dynamischen Systemen transformiert das System in den Laplacebereich, wofür es eine Reihe von Stabilitätskriterien und daran orientierten Regelalgorithmen gibt (siehe z.B. [32], [29], [18] u.a.).

Bemerkung 1.30 Satz 1.28 sagt aus, dass

$$\|\mathbf{v}\|_{L_2} \leq \left(\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2 \right) \|\mathbf{w}\|_{L_2},$$

dabei ist $\gamma^* = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2$ kleinste obere Schranke und damit nicht zu verbessern. Im Zusammenhang mit Einbettungen solcher Übertragungsfunktionen $\mathbf{G}(s)$ in sogenannte *Hardyräume*¹² wird $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \|\mathbf{G}(j\omega)\|_2$ als H_∞ -Norm bezeichnet (siehe z.B. [110]). Die Konstruktion von stabilen dynamischen Systemen mit minimaler Verstärkung γ^* hat hier ihren begrifflichen Ursprung und heißt deshalb *H_∞ -Regelung*, insbesondere auch bei Problemen mit nichtlinearen Systemen, bei denen Satz 1.28 nicht anwendbar ist.

¹²G.H. Hardy, 1877-1947

1.4 Dissipative Systeme

Beziehungen zwischen asymptotisch stabilen dynamischen Systemen und beschränkt-verstärkend L-stabilen Systemen sind insbesondere für allgemeine nichtlineare Systeme gemäß

$$(1.18) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{w}), \end{aligned}$$

nicht direkt abzuleiten. Abhilfe schafft der Begriff der dissipativen Systeme (s. [120, 121, 107]), welcher einen Zusammenhang zwischen den verschiedenen Stabilitätskriterien herstellt. Es wird \mathbf{f} lipschitzstetig und \mathbf{l} stetig bzgl. Zustand \mathbf{x} und Eingabefunktion \mathbf{w} angenommen.

Definition 1.31 (dissipatives System)

Das dynamische System (1.18) heißt **dissipativ** bezüglich der Funktion $s : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$, falls es eine Funktion $S : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ gibt, so dass

$$(1.19) \quad S(\mathbf{x}(t_1)) \leq S(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt$$

für alle $\mathbf{x}_0 \in X, t_1 \geq t_0$ und $\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}$

mit $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ und $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{w}(\cdot))$.

Das System heißt **erreichbar vom Punkt** $\mathbf{x}_1 \in X$, wenn für jeden Zustand $\mathbf{x} \in X$ ein Signal $\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}$ und $t_1 < \infty$ existieren, so dass $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}_1, t_0, \mathbf{w}(\cdot))$ gilt.

Bemerkung 1.32 Hinter der Funktion S verbirgt sich ein gespeichertes Potential des Systems, weshalb sie als Energie- oder Speicherfunktion¹³ bezeichnet wird. Entsprechend steht s für die Verteilung von extern zugeführter Energie¹⁴ im System. Die Dissipativitätseigenschaft verlangt demnach, dass die Summe von innerer und eingebrachter Energie- bzw. Speicher- menge nicht wachsen dürfen.

Die Wahl der Funktion $S(\mathbf{x})$ muss geeignet erfolgen, analog den Lyapunovfunktionen, während $s(\mathbf{w}, \mathbf{v})$ vom Problem bestimmt wird. Eine häufig auftretende Funktion ist beispielsweise

$$(1.20) \quad s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \mathbf{w}^T \mathbf{v}.$$

Dissipative Systeme bezüglich dieser Funktion heißen **passiv**.

Ist das dynamische System (1.18) dissipativ bezüglich

$$(1.21) \quad s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$$

mit $\gamma \geq 0$, so gilt für alle $\mathbf{x}_0 \in X, t_1 \geq t_0$ und $\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}$

$$\int_{t_0}^{t_1} \gamma^2 \|\mathbf{w}(t)\|^2 - \|\mathbf{v}(t)\|^2 dt \geq S(\mathbf{x}(t_1)) - S(\mathbf{x}(t_0)) \geq -S(\mathbf{x}(t_0))$$

¹³**Energiefunktion** engl.: „storage function“

¹⁴**Zufuhr rate** engl.: „supply rate“

woraus

$$\int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{v}(t)\|^2 dt \leq \gamma^2 \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt + S(\mathbf{x}(t_0))$$

folgt. Hierbei ist zu beachten, dass sich wegen

$$\|\mathbf{v}(\cdot)\|_{L_2}^2 \leq \gamma^2 \|\mathbf{w}(\cdot)\|_{L_2}^2 + \beta^2 \leq \gamma^2 \|\mathbf{w}(\cdot)\|_{L_2}^2 + 2\gamma\beta \|\mathbf{w}(\cdot)\|_{L_2} + \beta^2 = (\gamma \|\mathbf{w}(\cdot)\|_{L_2} + \beta)^2$$

sofort

$$\|\mathbf{v}(\cdot)\|_{L_2} \leq \gamma \|\mathbf{w}(\cdot)\|_{L_2} + \beta$$

ergibt und somit beschränkt-verstärkende L-Stabilität bzgl. der L_2 -Norm folgt.

1.4.1 Eigenschaften dissipativer Systeme

Nachstehend werden einige Fragen zu notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Dissipativität eines dynamischen Systems diskutiert.

Satz 1.33 *Betrachtet werde das System (1.18). Es ist dissipativ bezüglich einer Funktion $s : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ dann und nur dann, wenn*

$$(1.22) \quad S_-(\mathbf{x}) = \sup_{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}, t_1 \geq t_0} \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt \right\}, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}$$

für alle $\mathbf{x} \in X$ endlich ist.

Beweis: Sei S_- endlich auf X . Dann ist: $S_-(\mathbf{x}) \geq 0$ (setze $t_1 = t_0$ in (1.22)). Es gilt für $t_1 \geq t_0$

$$\underbrace{\sup_{\substack{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} \\ t_2 \geq t_0}} \left\{ - \int_{t_0}^{t_2} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt \right\}}_{S_-(\mathbf{x}(t_0))} \geq \underbrace{\sup_{\substack{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} \\ t_2 \geq t_1}} \left\{ - \int_{t_1}^{t_2} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt \right\}}_{S_-(\mathbf{x}(t_1))} - \int_{t_1}^{t_0} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt,$$

womit S_- Energiefunktion und das System dissipativ ist. Andererseits ist für ein dissipatives System mit Energiefunktion S

$$S(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt \geq S(\mathbf{x}(t_1)) \geq 0 \quad \forall \mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}, t_1 \geq t_0,$$

weshalb

$$S(\mathbf{x}_0) + \inf_{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}, t_1 \geq t_0} \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt \geq 0$$

und schließlich

$$S(\mathbf{x}_0) \geq - \inf_{\substack{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} \\ t_1 \geq t_0}} \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt = \sup_{\substack{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} \\ t_1 \geq t_0}} \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt \right\} = S_-(\mathbf{x}_0).$$

Bemerkung 1.34

- (i) Der Beweis von Satz 1.33 liefert zusätzlich die Aussage: Ist das System (1.18) dissipativ, dann ist $S_-(\mathbf{x})$ aus Gleichung (1.22) selbst Energiefunktion und es gilt

$$S_-(\mathbf{x}) \leq S(\mathbf{x})$$

für alle möglichen Energiefunktionen $S(\mathbf{x})$.

- (ii) Falls das System vom Punkt $\mathbf{x}_e \in X$ erreichbar ist, genügt es, den Test aus Satz 1.33 auf \mathbf{x}_e zu beschränken: Das System (1.18) ist dissipativ $\iff S_-(\mathbf{x}_e) < \infty$.

Begründung: Die Eigenschaft der Endlichkeit von S_- wird auf die erreichbaren Punkte vererbt.

- (iii) Die Berechnung von $S_-(\mathbf{x}_e)$ ist ein Test, ob es sich um ein dissipatives System handelt, ohne dabei auf eine Energiefunktion zurückzugreifen. Notwendig für den Test ist die Lösung eines Optimalsteuerungsproblems, dessen Wertefunktion selbst Energiefunktion ist (s. Kapitel 2).

Satz 1.35 Das System (1.18) sei erreichbar vom Punkt \mathbf{x}_e . Die Funktion $S_+ : X \rightarrow \mathbb{R}_0^+$ sei bezüglich $s : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(1.23) \quad S_+(\mathbf{x}) = \inf_{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}, t_1 \geq t_0} \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt, \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e, \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x},$$

dann erfüllt S_+ die Dissipationsungleichung (1.19). Das System ist dissipativ genau dann, wenn es ein reellwertiges $K > -\infty$ mit $S_+(\mathbf{x}) \geq K \forall \mathbf{x} \in X$ gibt.

Beweis: Angenommen S_+ ist beschränkt und $t_2 > t_1$. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} S_+(\mathbf{x}(t_2)) &= \inf_{\substack{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} \\ t_0 \leq t_2}} \int_{t_0}^{t_2} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt && \text{mit } \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}(t_2; \mathbf{x}_e, t_0) \\ &\leq \inf_{\substack{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} \\ t_0 \leq t_1 \leq t_2}} \left\{ \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt \right\} + \int_{t_1}^{t_2} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt \\ &&& \text{mit } \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_1; \mathbf{x}_e, t_0), \quad \mathbf{x}(t_2) = \mathbf{x}(t_2; \mathbf{x}_1, t_1) \\ &= S_+(\mathbf{x}(t_1)) + \int_{t_1}^{t_2} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt, \end{aligned}$$

womit die Ungleichung (1.19) erfüllt wird. Allgemein gilt für freies $\mathbf{x} \in X$

$$\begin{aligned} S_-(\mathbf{x}_e) &= \sup_{\substack{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} \\ t_0 \leq t_1}} \left\{ - \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt \right\} && \text{für freies } \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x} \in X \text{ und } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e \\ &= - \inf_{\substack{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} \\ t_0 \leq t_1}} \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt && \text{für freies } \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x} \in X \text{ und } \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e \\ &= - \inf_{\mathbf{x} \in X} \{S_+(\mathbf{x})\} = \sup_{\mathbf{x} \in X} \{-S_+(\mathbf{x})\}, \end{aligned}$$

woraus zusammen mit Bemerkung 1.34(ii) die zweite Behauptung folgt.

Bemerkung 1.36

- (i) Die Funktion S_+ hängt i.a. von der Wahl des Punktes $\mathbf{x}_e \in X$ ab.
- (ii) Angenommen, das System ist dissipativ mit Energiefunktion S . Dann folgt aus der Dissipationsungleichung (1.19) mit $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e$, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}$

$$S(\mathbf{x}) \leq S(\mathbf{x}_e) + \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) dt \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{W}, t_1 \geq t_0$$

mit $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_e$, $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}$, also

$$0 \leq S(\mathbf{x}) \leq S(\mathbf{x}_e) + S_+(\mathbf{x}),$$

womit $S(\mathbf{x}_e) + S_+(\mathbf{x})$ selbst Energiefunktion ist und

$$S_-(\mathbf{x}) \leq S(\mathbf{x}) \leq S(\mathbf{x}_e) + S_+(\mathbf{x})$$

für jede Energiefunktion des dissipativen Systems folgt.

Der zu Beginn des Kapitels angedeutete Zusammenhang zwischen den verschiedenen Stabilitätskriterien kann nun herausgestellt werden. Hierfür sei zunächst angenommen, dass für ein dissipatives System eine stetig differenzierbare Funktion S existiert, welche bezüglich einer Funktion $s : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ die Dissipationsungleichung erfüllt. Dann kann die **Dissipationsungleichung in differentieller Form** angegeben werden

$$(1.24) \quad \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \leq s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{w},$$

welche auf den folgenden Satz führt.

Satz 1.37 Sei $S \in C^1(X)$, $S(\mathbf{x}) \geq 0$ auf X , Energiefunktion von (1.18) und bezüglich $s : W \times V \rightarrow \mathbb{R}$ Gleichung (1.24) erfüllt. Sei außerdem

$$(1.25) \quad s(\mathbf{0}, \mathbf{v}) \leq 0 \quad \text{für alle } \mathbf{v}$$

und $\mathbf{0} \in X$ lokales Minimum von S . Dann ist die Nulllösung eine stabile Ruhelage des ungestörten Systems

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{0})$$

mit Lyapunovfunktion $V(\mathbf{x}) = S(\mathbf{x}) - S(\mathbf{0})$.

Beweis: Die zu prüfenden Kriterien (I)-(III) des Satzes 1.8 folgen sofort aus den Voraussetzungen und Gleichung (1.24).

In Anlehnung an Bemerkung 1.27 wird folgende Definition angegeben

Definition 1.38 (beobachtbar, erkennbar)

Das System (1.19) heißt **beobachtbar bzgl. $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$** ¹⁵, wenn

$$\mathbf{w} \equiv \mathbf{0}, \mathbf{v} \equiv \mathbf{0} \implies \mathbf{x} \equiv \mathbf{0},$$

es heißt **erkennbar bzgl. $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$** ¹⁶, wenn

$$\mathbf{w} \equiv \mathbf{0}, \mathbf{v} \equiv \mathbf{0} \implies \lim_{t \rightarrow 0} \mathbf{x}(t) = \mathbf{0}.$$

Bemerkung 1.39

- (i) Betrachtet man ein dissipatives System mit normierter Energiefunktion¹⁷ bezüglich $s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$, dann ergibt sich mit der Beobachtbarkeit bzgl. $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ für alle ungestörten Trajektorien mit $\mathbf{x}(t_1) = \mathbf{x}(t_1, \mathbf{x}_0, t_0, \mathbf{0})$ wegen $S(\mathbf{x}(t_1)) \geq 0$

$$S(\mathbf{x}(t_1)) - S(\mathbf{x}(t_0)) \leq - \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{v}(t)\|^2 dt \implies S(\mathbf{x}(t_0)) \geq \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{v}(t)\|^2 dt.$$

Es gilt wegen $\mathbf{x}(t_0) \neq \mathbf{0}$ und der Stetigkeit von \mathbf{v} : $\|\mathbf{v}(t)\|^2 > \varepsilon_v$ auf einem Intervall $[t_0, t_0 + \rho]$ mit $\rho > 0$, woraus $S(\mathbf{x}) > 0$ für $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ folgt.

- (ii) Sei $S \in C^1(X)$, $S(\mathbf{x}) \geq 0$ auf X , dann folgt zusammen mit Satz 1.37 und 7 **lokale asymptotische Stabilität**. Analog ergibt sich die lokale asymptotische Stabilität für erkennbare Systeme mit positiv definierter normierter Energiefunktion $S \in C^1(X)$, $S(\mathbf{x}) \geq 0$ auf X (siehe [107]).

Wenn die differentielle Dissipationsungleichung auf $s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$ angewendet wird, dann erhält man mit

$$(1.26) \quad \frac{\partial S(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) + \|\mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{w})\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 \leq 0$$

einen Ungleichungstyp, der im Kapitel 2 besprochen wird und durch eine „optimale“ Störung $\mathbf{w}^*(\cdot) \in \mathcal{W}$ zum Gleichheitszeichen führt. Bekannt ist, dass S keineswegs aus C^1 sein muß, weshalb der oben erwähnte Zusammenhang zum Stabilitätsbegriff im Sinne der Definition 1.6 für $S \in C^0$ gesondert betrachtet werden muß. Ergebnisse werden in [101] geliefert, wobei die Lösungen von Ungleichung (1.26) als Sattelpunktprobleme behandelt werden. Diesem Zugang sind die beiden folgenden Abschnitte gewidmet.

¹⁵beobachtbar bzgl. $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ engl. „zero-state observable“

¹⁶erkennbar bzgl. $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$ engl. „zero-state detectable“

¹⁷d.h. S hat an der Minimumstelle $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ den Wert $S(\mathbf{0}) = 0$

Kapitel 2

Optimalsteuerungsprobleme

Die Aufgabe allgemeiner Regelungen ist es, ein System $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ vermöge einer Regelung $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ zu stabilisieren. Dabei sind problemspezifische Fragestellungen des Verhaltens von Regelgesetzen zu berücksichtigen. Wird das Zusammenwirken zwischen den Systemgrößen in formal messbaren Kriterien erfasst, können die gesuchten Steuerungen durch gewisse Optimalitätseigenschaften charakterisiert werden.

2.1 Grundaufgabe

Die grundsätzlichen Fragestellungen der optimalen Steuerung lassen sich durch die Aufgabe

$$(2.1) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \rightarrow \min \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{r}_0(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_f(\mathbf{x}_f) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t) &\in U \quad \forall t \in [t_0, t_f] \end{aligned}$$

formulieren. Das Paar $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$ heißt **Steuerprozess**, wobei $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot))$ **optimal** genannt wird, wenn das reellwertige Funktional $\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ minimiert wird. Die Variablen $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ sind wiederum **Zustandsvariablen**, $\mathbf{u}(t) \in U \subset \mathbb{R}^{n_u}$ heißen **Steuervariablen**. Die **Randbedingungen** $\mathbf{r}_{0/f}$ legen gegebenenfalls die Zustandsvariablen an den Randpunkten $t_{0/f}$ fest. Diese selbst können frei oder auch fest sein. In jedem Fall aber lässt sich das Problem (2.1) auf das feste Intervall $[0, 1]$ transformieren.

Die Lösungen von Optimalsteuerungsproblemen können für stetig differenzierbare oder wenigstens stückweise stetig differenzierbare Funktionen auf die Ergebnisse der klassischen Variationsrechnung zurückgeführt werden. Insbesondere folgen die notwendigen Bedingungen für optimale Trajektorien aus der *Euler-Lagrange-Gleichung*¹. Das in der Theorie der Optimalsteuerungen fundamentale *Pontryaginsche*² *Minimumprinzip* stellt dagegen schwächere

¹L. Euler, 1707-1783, J.-L. Lagrange, 1736-1813, *Euler-Lagrange-Gleichung* siehe z.B. [62], [55]

²L. S. Pontryagin (Л. С. Понтрягин), 1908-1988, *Minimumprinzip* siehe z.B. [55, 67, 90]

Anforderungen bezüglich der Steuerung. Ausreichend sind die folgenden Voraussetzungen: Es sei der Steuerprozess $(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) \in C_p^1([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_x}) \times C_p^0([t_0, t_f], \mathbb{R}^{n_u})$, d.h. der Zustand ist stückweise stetig differenzierbar und die Steuerung stückweise stetig. Die Funktionen $\mathbf{f} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$, $l : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{r}_i : \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}^{n_{r_i}}$ sind stetig differenzierbar bezüglich \mathbf{x} und stetig bezüglich \mathbf{u} . Die Beschränkung der Steuerungen bezieht sich damit auf eine sehr allgemeine Steuermenge³ U , z.B. eine beschränkte Steuermenge, was den praktischen Gegebenheiten in vielen Anwendungen entspricht.

2.2 Notwendige Bedingungen

Notwendige Bedingungen für einen lokal optimalen Steuerprozess der Aufgabe (2.1) werden an dieser Stelle zusammenfassend dargestellt. Die Anwendung der *Lagrangeschen Multiplikatorenregel* führt auf das erweiterte Funktional

(2.2)

$$\mathcal{J}^e(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} (\lambda_0 l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \boldsymbol{\lambda}^T(t) (\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - \dot{\mathbf{x}}(t))) dt + \sum_{i=0, f} \boldsymbol{\nu}_i^T \mathbf{r}_i(\mathbf{x}_i)$$

mit Lagrangemultiplikatoren λ_0 , $\boldsymbol{\lambda}$ und $\boldsymbol{\nu}_{0/f}$ und erweiterten Integranden

$$l^e(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}) = \lambda_0 l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{x}}).$$

Es wird $\lambda_0 = 1$ gesetzt⁴. Notwendige Bedingung für ein lokales Minimum der Aufgabe (2.1) ist die Existenz von nicht gleichzeitig verschwindenden Lagrangeschen Multiplikatoren für eine Lösung der Gleichungen, die durch formales Aufstellen der Euler-Lagrange-Gleichungen des erweiterten Funktionals entstehen:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial l^e}{\partial \mathbf{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial l^e}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \right) \Big|_{(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))} &= 0 \\ \frac{\partial l^e}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))} &= 0, \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})} + \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T &= 0 \\ \frac{\partial l}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})} + \boldsymbol{\lambda}^T \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})} &= 0 \end{aligned}$$

entlang optimaler Trajektorien folgt. Die natürlichen Randbedingungen führen auf

$$\begin{aligned} \frac{\partial l^e}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}(t_0)} &= -\boldsymbol{\lambda}^T(t_0) = \boldsymbol{\nu}_0^T \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}_0} \Big|_{\mathbf{x}_0} \\ \frac{\partial l^e}{\partial \dot{\mathbf{x}}} \Big|_{\dot{\mathbf{x}}(t_f)} &= -\boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = -\boldsymbol{\nu}_f^T \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{x}_f} \Big|_{\mathbf{x}_f}. \end{aligned}$$

³es ist genügt, dass die Steuermenge U messbar ist (vgl. [55]).

⁴Der Fall $\lambda_0 = 0$ tritt auf, wenn gewisse Regularitätskriterien nicht erfüllt werden (vgl. [55], [62]), was hier wegen der praktischen Irrelevanz nicht weiter beachtet werden soll.

Damit sind die Randwerte der Multiplikatorfunktionen $\boldsymbol{\lambda}$ frei, falls die zugehörigen Randwerte der Zustandsvariablen explizit gegeben sind bzw. sie verschwinden, falls $\partial \mathbf{r}_i / \partial \mathbf{x}_j = 0$. In der Regel lassen sich die Lagrangemultiplikatoren $\boldsymbol{\nu}_i$ eliminieren.

Definition 2.1 (Hamiltonfunktion, adjungierte Variablen)

Die Lagrangeschen Multiplikatorfunktionen $\boldsymbol{\lambda} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ des erweiterten Funktionals (2.2) heißen **adjungierte Variablen**. Die Funktion

$$(2.3) \quad H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}) = l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

wird **Hamiltonfunktion**⁵ genannt.

Damit lässt sich ein Randwertproblem formulieren, welches notwendig für die Existenz der Aufgabe (2.1) ist. Liegt ein optimaler Steuerprozess vor, so gilt

$$(2.4) \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad \left(= \left. \frac{\partial H}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^T \right)$$

$$(2.5) \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^T$$

$$(2.6) \quad \mathbf{0} = \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})}$$

$$(2.7) \quad \mathbf{r}_0(\mathbf{x}(t_0)) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_f(\mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{0}$$

$$(2.8) \quad \boldsymbol{\lambda}(t_0) = - \left. \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}_0} \right|_{\mathbf{x}_0}^T \boldsymbol{\nu}_0, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \left. \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{x}_f} \right|_{\mathbf{x}_f}^T \boldsymbol{\nu}_f$$

Die Gleichungen (2.5) sind die **adjungierten Differentialgleichungen** und zusammen mit (2.4) werden sie **kanonische Differentialgleichungen** genannt (siehe z.B. [55, 62, 18] u.a.).

2.2.1 Minimumprinzip

Die Berechnungsvorschrift für $\mathbf{u} = \mathbf{u}^*$ aus (2.6) deutet bereits auf das Minimumprinzip hin. Zur Veranschaulichung wird folgende Funktion definiert:

$$(2.9) \quad V(\mathbf{x}; t) = V(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}(t)} = \int_t^{t_f} l(\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau)) d\tau \quad \text{mit} \quad \mathbf{x}^*(\tau) = \mathbf{x}^*(\tau; \mathbf{x}(t), t)$$

für $t < \tau$, wobei t nur als implizites Argument der **Wertefunktion** $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ betrachtet wird.

⁵William R. Hamilton, 1805-1865, der Name **Hamiltonfunktion** folgt der Bezeichnung strukturell verwandter Probleme in der klassischen Mechanik

Auf jedem Teilintervall $[\tau, t_f] \subset [t, t_f]$ ist das zugehörige Teilstück der optimalen Trajektorie selbst Lösung des Optimalsteuerungsproblems mit Anfangswert $\mathbf{x}(\tau)$. Diese Eigenschaft von V wird **Optimalitätsprinzip** genannt. Es gilt für $h > 0$

$$\begin{aligned} V(\mathbf{x}(t)) &= \min_{\mathbf{u} \in U} \left\{ \int_t^{t+h} l(\mathbf{x}(\tau), \mathbf{u}(\tau)) \, d\tau + V(\mathbf{x}(t+h)) \right\} \\ &= \min_{\mathbf{u} \in U} \left\{ hl(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + V(\mathbf{x}(t)) + h \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \right\} + \mathbf{o}(h), \end{aligned}$$

so dass für $h \rightarrow 0$

$$(2.10) \quad 0 = \min_{\mathbf{u} \in U} \left\{ l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \right\}$$

beziehungsweise

$$0 = \min_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}).$$

folgt. Das ist eine Verschärfung der Gleichung (2.6), wenn gilt

$$(2.11) \quad \left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t))} = \boldsymbol{\lambda}^{*\text{T}}(t).$$

Diese Beziehung ergibt sich, wenn der Steuerprozess $(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*)$ betrachtet wird. Dieser ist offensichtlich gerade für $\mathbf{x}(\cdot) \equiv \mathbf{x}^*(\cdot)$ optimal, so dass $H(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*, \partial V/\partial \mathbf{x})$ durch $\mathbf{x}^*(\cdot)$ minimiert wird. Es folgt mit $H = H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{p})$, $\mathbf{p} = \partial V/\partial \mathbf{x}$ entlang optimaler Trajektorien

$$0 = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} \frac{\partial^2 V}{\partial \mathbf{x}^2} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} \right)^{\text{T}} = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} + \left(\frac{d}{dt} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right)^{\text{T}}.$$

Damit genügt $\partial V/\partial \mathbf{x}$ der Differentialgleichung (2.5). Die Randwerte erweisen sich als äquivalent zu denen der adjungierten Variablen, wenn die Wertefunktion bzgl. des erweiterten Funktionals (2.2) nach \mathbf{x}_0 bzw. \mathbf{x}_f abgeleitet wird. Gleichung (2.11)⁶ wird damit bestätigt.

Bei den letzten Betrachtungen wurde $V \in C^2$ angenommen. Ein Beweis des Minimumprinzips ohne diese Annahme wird bspw. in [55] gegeben. Allgemein gilt unter den zu Beginn des Kapitels gegebenen Voraussetzungen der folgende

Satz 2.2 (Minimumprinzip⁷) *Es sei $(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*)$ ein optimaler Steuerprozess der Aufgabe (2.1). Dann existieren Vektoren $\boldsymbol{\nu}_i \in \mathbb{R}^{n_{r_i}}$ und eine Vektorfunktion $\boldsymbol{\lambda} : [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R}^{n_x}$ die nicht gleichzeitig verschwinden, dass Gleichungen (2.5), und (2.8) erfüllt sind und für fast alle $t \in [t_0, t_1]$*

$$H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t)) = \min_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}(t)) = \mathcal{H}(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t))$$

gilt.

⁶Gleichung (2.11) sagt aus: Die adjungierte Variable $\boldsymbol{\lambda}_i$ ist ein Maß für den Einfluss eines jeweiligen Zustandes \mathbf{x}_i zum Zeitpunkt t auf den Wert des Zielfunktional. Diese Interpretation ist in Anwendungen auf reale dynamische Systeme übertragbar.

⁷In der Literatur häufig auch **Pontryaginsches Maximumprinzip** genannt, bedingt durch die alternative Erweiterung des Funktionals $l^e = l + \boldsymbol{\lambda}^{\text{T}}(\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{f})$ (vgl. Gleichung (2.2)), weshalb in diesem Fall wegen der entsprechenden Gestalt der Hamiltonfunktion $H = \boldsymbol{\lambda}^{\text{T}} \mathbf{f} - l$ maximiert werden muss.

2.2.2 Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung

Die Überlegungen des letzten Kapitels werden in dieser Form mit Bellmans Arbeiten zur „*Dynamischen Programmierung*“ in Zusammenhang gebracht⁸. Die Gleichung (2.10) wird deshalb **Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung** genannt, oder auch **Hamilton-Jacobi-Gleichung**, wenn sie in der Form

$$(2.12) \quad 0 = \mathcal{H} \left(\mathbf{x}^*(t), \left. \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*(t)} \right)$$

mit $V(\mathbf{x}_f; t_f) = V(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}_f} = 0 \quad \forall \mathbf{x}_f \in X : \mathbf{r}_f(\mathbf{x}_f) = \mathbf{0}$

geschrieben wird⁹. Es handelt sich dabei um eine partielle Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung $V(\mathbf{x})$ einen globalen Informationsgehalt bezüglich des Zustandsraums gibt. Für konkrete technische Prozesse ist dieser Ansatz praktisch nicht anwendbar, da Lösungen aufgrund der hohen Dimension kaum berechenbar sein werden.

Dies steht ganz im Gegensatz zum Charakter der Lösungen der voran gegebenen notwendigen Bedingungen, gewonnen mit den Mitteln der klassischen Variationsrechnung. Hier wird ein lokaler Einblick in die Lösungsstruktur genommen, so dass aus den resultierenden gewöhnlichen Differentialgleichungen in Form von Randwertproblemen mit den Mitteln der Numerik Lösungstrajektorien erhalten werden können. In der Tat handelt es sich bei den Lösungen der Gleichungen (2.4) - (2.8) um die Charakteristiken von (2.12).

Die Darstellung durch die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung gibt auch einen Einblick in die Informationsstruktur der optimalen Steuerung \mathbf{u}^* . Sie ist prinzipiell zustandsabhängig, d.h. es ist $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(\mathbf{x})$. Die Lösungen der gewöhnlichen Differentialgleichungen nach Satz 2.2 liefern zwar zeitabhängige optimale Steuerungen $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}(t)$, die aber als „off-line“ berechnete zustandsabhängige Steuerungen zu betrachten sind, stets unter der Voraussetzung, dass während des verbleibenden Teils der Trajektorie auch optimal gesteuert wird. Die Frage nach der „Optimalität“ einer Steuerung bei nicht vorhersehbaren äußeren Einflüssen auf die Dynamik wird uns noch weiter beschäftigen.

2.2.3 Beziehungen der Randdaten

Häufig sind die Randpunkte des Intervalls $[t_0, t_f]$ mit den Randbedingungen der Aufgabe (2.1) in der Form

$$(2.13) \quad \mathbf{r}_i(t_i, \mathbf{x}(t_i)) = \mathbf{0}, \quad i = 0, f$$

verknüpft. Damit sind t_0, t_f unbekannte Parameter im Minimierungsproblem und Beziehungen für notwendige Bedingungen aus dem erweiterten Funktional (2.2) durch formales Ab-

⁸zuvor bereits von **C. Carathéodory** (*K. Καραθεοδωρης*), 1873-1950, veröffentlicht, siehe[85].

⁹C. Jacobi, 1804-1851, R.E. Bellman, 1920-1984, es handelt sich hierbei o.E. um die **Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung** für autonome Systeme.

leiten zu finden. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{J}^e}{dt_i} &= \mp H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda})|_{t_i} \pm \boldsymbol{\lambda}^\top \dot{\mathbf{x}}^*|_{t_i} + \boldsymbol{\nu}_i^\top \left(\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t_i} + \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial \mathbf{x}_i} \dot{\mathbf{x}}^* \right) \Big|_{t_i} \\ &= \mp H(\mathbf{x}^*, \mathbf{u}^*, \boldsymbol{\lambda})|_{t_i} + \boldsymbol{\nu}_i^\top \frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial t_i} = 0, \end{aligned}$$

so dass mit Gleichung (2.8)

$$(2.14) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda})|_{t_0} &= \boldsymbol{\nu}_0^\top \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial t_0} \Big|_{t_0} \\ \mathcal{H}(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda})|_{t_f} &= -\boldsymbol{\nu}_f^\top \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial t_f} \Big|_{t_f} \end{aligned}$$

an den Randpunkten folgt. Ist insbesondere ein Randpunkt frei, so verschwindet dort die Hamiltonfunktion. Für ein autonomes System wie in Aufgabe (2.1) gilt

$$\frac{dH}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\lambda}^\top}{dt} \mathbf{f} + \boldsymbol{\lambda}^\top \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} + \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = \boldsymbol{\lambda}^\top \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} - \boldsymbol{\lambda}^\top \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f} = 0$$

so dass bei freiem Rand $H \equiv 0$ ist.

Bei gekoppelten Randbedingungen der Art $\mathbf{r}(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_f) = \mathbf{0}$ mit $\mathbf{r} \in C^1(\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}^{n_s})$ ergibt sich aus den natürlichen Randbedingungen

$$\boldsymbol{\lambda}(t_0) = - \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}_0} \Big|_{\mathbf{x}_0}^\top \boldsymbol{\nu}, \quad \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}_f} \Big|_{\mathbf{x}_f}^\top \boldsymbol{\nu},$$

und damit eine Kopplung der Randdaten der adjungierten Variablen.

Aus dem Minimumprinzip lässt sich die Stetigkeit der Hamiltonfunktion ableiten (siehe [55], [62], [18]). Diese Eigenschaft liefert an inneren Sprung- oder Knickstellen $t_s \in (t_0, t_f)$ weitere Bedingungen.

Häufig lassen sich die Zielmannigfaltigkeiten parametrisieren, so dass

$$\mathbf{x}(t_f) = \mathbf{h}(\mathbf{s})$$

mit $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n_s}$, $\mathbf{h} \in C^1(\mathbb{R}^{n_s}, \mathbb{R}^{n_x})$ gilt, und entlang dieser $V(\mathbf{x}(\mathbf{s})) \equiv 0$ ist. Also gilt

$$\mathbf{0} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{s}} = \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}(t_f)} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{s}} = \boldsymbol{\lambda}(t_f) \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{s}}$$

wodurch sich die Lagrangemultiplikatoren eliminieren bzw. geeignet transformieren lassen (siehe [56]).

2.2.4 Singuläre Steuerungen

Bei gegebenen Werten der Zustände und Adjungierten wird die optimale Steuerung zum Zeitpunkt $t \in [t_0, t_f]$ gemäß Gleichung (2.6) berechnet. Tritt allerdings die Steuerung linear

in H auf, dann ergibt sich mit der *Schaltfunktion* $\partial H/\partial \mathbf{u} = S_{\text{schalt}}$ die optimale Steuerung

$$\mathbf{u}^* = \begin{cases} u_{\min}, & \text{falls } S_{\text{schalt}} > 0, \\ u_{\text{sing}}, & \text{falls } S_{\text{schalt}} = 0 \text{ auf } [t_{s1}, t_{s2}], t_0 < t_{s1} < t_{s2} < t_1, \\ u_{\max}, & \text{falls } S_{\text{schalt}} < 0. \end{cases}$$

Gibt es keine inneren Teilintervalle mit $S_{\text{schalt}} = 0$, wohl aber Nullstellen von S_{schalt} , dann handelt es sich um eine sogenannte *bang-bang-Steuerung* \mathbf{u}^* . Auf den Teilintervallen mit *singulärer Steuerung* gilt $S_{\text{schalt}}(t) \equiv 0$, $dS_{\text{schalt}}/dt \equiv 0$ usw. Die gesuchte singuläre Steuerung ergibt sich dann aus der ersten auftretenden Ableitung $d^k S_{\text{schalt}}/dt^k = 0$ mit $\partial(d^k S_{\text{schalt}}/dt^k)/\partial \mathbf{u} \neq 0$.

2.3 Aufgaben mit Ungleichungsnebenbedingungen

In der praktischen Anwendung treten sehr häufig Ungleichungsnebenbedingungen auf. Die Formulierung als Optimalsteuerungsproblem lautet dann

$$(2.15) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt \rightarrow \min \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{r}_0(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_f(\mathbf{x}_f) = \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) &\geq \mathbf{0} \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{u}(t) &\in U \quad \forall t \in [t_0, t_f] \end{aligned}$$

unter den Voraussetzungen des Systems (2.1) und zusätzlich $\mathbf{g} : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \rightarrow \mathbb{R}^{n_g}$ stetig differenzierbar. Grundsätzlich kann die Ungleichungsbeschränkung an das Funktional angehängt werden. Der erweiterte Integrand der Lagrangefunktion lautet in diesem Fall

$$(2.16) \quad l^{\text{e2}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \dot{\mathbf{x}}, \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\mu}) = l(\mathbf{x}, \mathbf{u}) + \boldsymbol{\lambda}^T (\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \dot{\mathbf{x}}) + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u})$$

mit Multiplikatorfunktionen

$$\boldsymbol{\mu}_i(t) \begin{cases} = 0, & \text{falls } g_i(t) > 0, \\ \leq 0, & \text{falls } g_i(t) = 0. \end{cases}$$

Tritt im Intervall $[t_0, t_f]$ ein Randstück $[t_{s1}, t_{s2}] \subset (t_0, t_f)$ auf, so folgen die notwendigen Bedingungen

$$(2.17) \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^T - \boldsymbol{\mu}^T \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^T$$

$$(2.18) \quad \mathbf{0} = \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})} + \boldsymbol{\mu}^T \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u})}^T$$

mit den Randbedingungen (2.8) sowie Schaltbedingungen die sich aus der Stetigkeit von $H + \boldsymbol{\mu}^T \mathbf{g}$ und den Adjungierten ergeben.

Bemerkung 2.3 Es sei auf mehrere kritische Punkte hingewiesen

- (i) Falls eine Beschränkung aktiv ist, ergibt sich $\mathbf{u}^*(t)$ aus der Randbedingung. Der zugehörige Multiplikator, wird dann aus Bedingung (2.18) berechnet, was im mehrdimensionalen Fall sehr aufwendig werden kann. Notwendig hierfür ist $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{u} \neq 0$. In diesem Fall handelt sich um eine sogenannte „echte“ Steuerbeschränkung.
- (ii) Handelt es sich nicht um „echte“ Steuerbeschränkungen, können diese analog zum Vorgehen bei Schaltfunktionen singulärer Steuerungen (s. Abschnitt 2.2.4) abgeleitet werden, um Steuerbeschränkungen zu induzieren (siehe [19, 57]). Es entstehen Unstetigkeiten in den adjungierten Variablen. Eine alternative Behandlung wird in [24] untersucht. Hier werden die numerisch empfindlichen Probleme als *differential-algebraische Gleichungen* behandelt und angepasste numerische Methoden verwendet.
- (iii) Die direkte numerische Lösung des Mehrpunkttrandwertproblems erfordert genaue Kenntnis der Schaltstruktur, was in der Regel eine sehr genaue Kenntnis der Dynamik und des Steuerprozesses erfordert.

2.4 Stabilität optimal gesteuerter Systeme

2.4.1 Lyapunovstabilität

In Anlehnung an Gleichung (1.14) aus Kapitel 1.3 wird folgendes System betrachtet

$$\begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) &= \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{v}\|^2 dt \rightarrow \min \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}, \quad t_f \in \mathbb{R}^+ \text{ frei} \\ \mathbf{u}(t) &\in U \quad \forall t \in [0, t_f], \end{aligned}$$

und es gelte für die Messfunktion \mathbf{l}

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{l}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t)) = \mathbf{0} \quad \text{und} \quad \mathbf{l}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(t)) \neq \mathbf{0} \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}.$$

Dann gilt für die zugehörige Wertefunktion (vgl. Abschnitt 2.2.1)

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)) = -\|\mathbf{v}\|^2 < 0 \quad \text{für} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

womit sich V als Lyapunovfunktion erweist und die Nulllösung von

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}^*(\mathbf{x}))$$

asymptotisch stabil ist. Dabei wird angenommen, dass $V \in C^1$ ist, was jedoch nicht notwendig erfüllt sein muss. Die Wahl des Kostenfunktional \mathcal{J} ist ebenfalls speziell, dennoch für viele regelungstechnische Anwendungen zutreffend.

Betrachtet wird wiederum die Hamilton-Jacobi-Gleichung des optimal gesteuerten Systems

$$0 = \|\mathbf{l}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t)))\|^2 + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}^*(\mathbf{x}(t))) = \|\tilde{\mathbf{l}}(\mathbf{x}(t))\|^2 + \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t)).$$

Mit der Transformation $\tilde{V}(\mathbf{x}(t)) = 1 - e^{-V(\mathbf{x}(t))}$ ergibt sich $\frac{d}{dt} \tilde{V}(\mathbf{x}(t)) = e^{-V(\mathbf{x}(t))} \frac{d}{dt} V(\mathbf{x}(t))$ und es folgt

$$0 = \|\tilde{\mathbf{l}}(\mathbf{x})\|^2 (1 - \tilde{V}(\mathbf{x})) + \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}),$$

was mit $\psi = \|\tilde{\mathbf{l}}\|^2$ der Gleichung (1.11) aus Kapitel 1.2.3 entspricht. Obwohl die Gleichung bei realen Anwendungen bereits bei geringer Dimension des Zustandsraumes nicht praktikabel ist, ergibt sich dennoch eine wesentliche Interpretation: optimale Steuerungen *maximieren das Stabilitätsgebiet*, welches dabei *unabhängig vom Zielfunktional* ist.

2.4.2 Schlechteste Störungen und dissipative Systeme

Betrachtet wird das in Kapitel 1.4 untersuchte System

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \quad (t_f, \mathbf{x}(t_f)) \text{ frei} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

mit fester und daher nicht explizit auftretender Steuerung $\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$, einer unbekanntenen Störung $\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} = \mathcal{L}_{p,e}^{n_w}$ und dem Zielfunktional

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} s(\mathbf{x}(t), \mathbf{w}(t)) dt \rightarrow \min$$

für eine Funktion $s : \mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_w} \rightarrow \mathbb{R}$. Die Berechnung einer im Sinne der Regelung schlechtesten Störung $\mathbf{w}(\cdot)$ führt auf ein Optimalsteuerungsproblem, bei dem die gesuchte Störung das Funktional $\mathcal{J}(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{w}^*(\cdot))$ maximiert. Angenommen es existiert für alle betrachteten $\mathbf{x}_0 \in X \subset \mathbb{R}^{n_x}$ eine extremale Funktion $\mathbf{w}^*(\cdot) \in \mathcal{L}_{p,e}^{n_w}$, dann ergibt sich die zugehörige Wertefunktion $V(\mathbf{x}_0) = \mathcal{J}(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{w}^*(\cdot))$ des Optimalsteuerungsproblems. Mit $S^* = -V$ ist dann unter Berücksichtigung des Optimalitätsprinzips (s. Abschnitt 2.2.1)

$$V(x(t_0)) - V(x(t_f)) = S^*(x(t_f)) - S^*(x(t_0)) = \int_{t_0}^{t_f} s(\mathbf{x}^*(t), \mathbf{w}^*(t)) dt \leq \int_{t_0}^{t_f} s(\mathbf{x}(t), \mathbf{w}(t)) dt$$

für alle $t_f > t_0$. Dissipativität für das System ergibt sich, falls $S^* \geq 0$ ist.

Unter entsprechenden Annahmen bezüglich der Differenzierbarkeit gilt die Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (2.10), hier in der Form

$$0 = \min_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}} \left\{ s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) - \frac{\partial S^*}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \right\},$$

analog zur differentiellen Dissipationsungleichung (1.26) aus Abschnitt 1.4. Insbesondere erweist sich

$$S^*(\mathbf{x}(t_0)) = S_-(\mathbf{x}(t_0)) = \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}, t_f > t_0} \left\{ - \int_{t_0}^{t_f} s(\mathbf{x}(t), \mathbf{w}(t)) dt \right\}$$

als untere Schranke aller Energiefunktionen S gemäß Satz 1.33. Hierbei erlaubt die Annahme der Existenz dieses Maximums, dieses auch als solches zu schreiben.

Kapitel 3

Robuste Steuerungen

3.1 Robustheit von Steuerungen

In Kapitel 1.3 wurden beschränkt-verstärkende L-stabile Systeme betrachtet, also solche mit

$$\|\mathbf{T}(\mathbf{w})\| \leq \gamma \|\mathbf{w}\| + \beta, \quad \gamma \geq 0, \quad \beta \geq 0$$

für alle $\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} = \mathcal{L}_{p,e}^{n_w}$. Dabei wird die Störung $\mathbf{w}(\cdot)$ im Sinne der Robustheit pessimistisch angenommen, d.h. je weniger robust das System ist, desto größer ist die maximale Verstärkung γ^* des Operators $\mathbf{T}(\mathbf{w})$ bzgl. \mathbf{w} . Eine geeignet gewählte Steuerung $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ des Systems im Sinne der Robustheit sollte dem entgegenwirken. Für einen Operator bzgl. eines durch \mathbf{u} gesteuerten Systems kann demnach

$$(3.1) \quad \|\mathbf{T}(\mathbf{w}; \mathbf{u})\| \leq \gamma \|\mathbf{w}\| + \beta, \quad \gamma \geq 0, \quad \beta \geq 0$$

geschrieben werden. Die Steuerung \mathbf{u} heißt in diesem Sinne *robust*, wenn für

$$\frac{\|\mathbf{T}(\mathbf{w}; \mathbf{u})\| - \beta}{\|\mathbf{w}\|} \leq \gamma$$

die Schranke einer maximalen Verstärkung γ durch $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ garantiert wird.

3.1.1 Anmerkungen

Der in der Einführung des Kapitels dargelegte Grundgedanke der Robustheit eines geregelten dynamischen Systems hat seinen Ursprung in der klassischen Regelung linearer zeitinvarianter Systeme. Die Frequenzganganalyse regte dazu an, den Wert der maximalen Verstärkung, also Verstärkung bei Resonanzfrequenz, zu minimieren. Symbolisiert durch die H_∞ -Norm im Funktionenraum der Übertragungsfunktionen (vgl. Abschnitt 1.3.1) hat sich hierfür der Begriff der H_∞ -Regelung durchgesetzt.

Erst später erwies sich der Zusammenhang zu linearen Optimalsteuerungs- und Sattelpunktproblemen als praktikabel, so dass die Berechnung der gesuchten Regelungen unter Verwendung nunmehr neuer mathematischer und numerischer Methoden in Zustandsraumdarstellung erfolgten. Der Weg dorthin erfolgte zunächst allerdings über die Formulierung stochastischer Modelle mit statistisch verteilten Störungen, bis schließlich der Zusammenhang zu

Differentialspielen erkannt und ausgenutzt worden ist. Insbesondere der letzte Ansatz führte bei linearen Systemen auf konstruktive Methoden. Entscheidende Arbeiten seien an dieser Stelle angeführt

- (i) Übergang der Regler-Berechnungen für linear-quadratische Systeme vom Frequenzbereich hin zu Systemuntersuchungen im Zustandsraum ([30, 109, 64, 84]),
- (ii) Konstruktion dissipativer Systeme durch glatte Lösungen der Hamilton-Jacobi-Isaacs-Gleichung für nichtlinear-affine Systeme [10, 5, 70, 96],
- (iii) Berücksichtigung verallgemeinerter Differenzierbarkeitsvoraussetzungen bei Lösungen der Hamilton-Jacobi-Isaacs-Gleichung für nichtlinear-affine und allgemeine nichtlineare dynamische Systeme durch Viskositätslösungen [101, 4, 6],
- (iv) Verallgemeinerung des dynamischen Systems durch Annahme partiell beobachteter Systeme und Konstruktion robuster Beobachter für den Zustand durch analoge Anwendung von Lösungen der resultierenden Hamilton-Jacobi-Isaacs-Gleichung ([58, 10, 89, 47, 48, 76]).

3.2 Optimalgesteuerte dissipative Systeme

3.2.1 Transformation des Steuerungsproblems

Die Überlegungen zur Robustheit sollen auf dissipative dynamische Systeme angewendet werden. Sei das System (1.18) von Kapitel 1.4 mit einer Regelung $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ gemäß

$$(3.2) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{w}) \\ \mathbf{v} &= \mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{u}(\mathbf{x}), \mathbf{w}) \end{aligned}$$

ausgestattet mit $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U} \subset L_{2,e}^{n_u}$ und $\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} = L_{2,e}^{n_w}$. Nach Kapitel 1.4 ist das System dissipativ, wenn es Funktionen S und s gibt (s. Definition 1.31) mit

$$S(\mathbf{x}(t_1)) \leq S(\mathbf{x}(t_0)) + \int_{t_0}^{t_1} s(\mathbf{w}(t), \mathbf{v}(t)) dt$$

für alle $\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}$ und $t_1 \geq t_0$. Die Wahl von $s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 - \|\mathbf{v}\|^2$ führt auf beschränkt-verstärkende L-stabile Systeme bzgl. des L_2 . Nach Abschnitt 2.4.2 liefert die Existenz von

$$(3.3) \quad S^*(\mathbf{x}(t); \mathbf{u}(\cdot)) = \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}, t_1 > t_0} \int_{t_0}^{t_1} \|\mathbf{l}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{w}(t))\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt$$

die gewünschte Eigenschaft.

Eine robust-optimale Steuerung $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}^*(\mathbf{x})$ soll neben der Dissipativität des Systems möglichst gute Optimalitätseigenschaften liefern, d.h. sie soll bei beliebiger Störung $\mathbf{w}(\cdot)$ so gewählt werden, dass

$$(3.4) \quad \mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{l}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{w}(t))\|^2 dt \rightarrow \min$$

im Sinne von Kapitel 2 mit $l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \|\mathbf{l}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})\|^2$ minimiert wird. Wird eine pessimistische Störung bezüglich der durch \mathbf{u}^* gesteuerten Trajektorien in Gleichung (3.3) eingesetzt, ergibt sich

$$(3.5) \quad S^*(\mathbf{x}(t); \mathbf{u}^*(\cdot)) = \max_{\mathbf{w} \in \mathcal{W}, t_f > t_0} \min_{\mathbf{u} \in \mathcal{U}} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{l}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(\mathbf{x}(t)), \mathbf{w}(t))\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt$$

und damit ein Sattelpunktproblem für das System (3.2) mit dem Funktional

$$(3.6) \quad \mathcal{J}_\gamma(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{l}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t))\|^2 - \gamma^2 \|\mathbf{w}(t)\|^2 dt \rightarrow \max_{\mathbf{w}} \min_{\mathbf{u}}.$$

Bemerkung 3.1 Die Steuerung \mathbf{u}^* wird in erster Linie die Robustheit des Systems zu garantieren haben. Optimalitätseigenschaften, charakterisiert durch die Minimalität des Funktionals (3.4), spielen eine untergeordnete Rolle. Der Grad der Robustheit, repräsentiert durch den angenommenen Verstärkungsfaktor γ , bestimmt damit indirekt das Maß an Optimalität, d.h. *je robuster das System ausgelegt wird, desto weniger optimal wird es sein.*

Bemerkung 3.2 Die Reihenfolge der Minimum- und Maximumoperation ist wesentlich. An späterer Stelle wird sich ergeben, dass die Austauschbarkeit der Operationen die Berechnung wesentlich erleichtern bzw. erst ermöglichen. Diese Eigenschaft muss damit aus den konkreten dynamischen Gleichungen folgen und ist gegebenenfalls bei der Modellierung zu beachten.

3.2.2 Eigenschaften der Modellierung

Die Verschiebung β in der allgemeinen Operatorgleichung (3.1) wurde in Abschnitt 3.2.1 bei Anwendung auf dynamische Systeme zunächst unterschlagen. Eine Verschiebung $\beta \neq 0$ ist dann sinnvoll, wenn $\|\mathbf{T}(\mathbf{w}; \mathbf{u})|_{\mathbf{w}=\mathbf{0}}\| \neq 0$. Es kann $\beta = \|\mathbf{T}(\mathbf{0}; \mathbf{u})\|$ gewählt werden. Für dynamische Systeme gemäß (3.2) beinhaltet dies für beliebigen (aber festen) Anfangswert \mathbf{x}_0 jeweils ein Optimalsteuerungsproblem des ungestörten Problems mit Startwert $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Andererseits ist die Kenntnis des Anfangswertes bei praktisch relevanten Problemen nicht gegeben. Dann wird der Anfangswert als Störgröße gewertet, so dass mit $\bar{\mathbf{w}}^T = (\mathbf{w}^T, \mathbf{x}_0^T)$

$$\|\mathbf{T}(\bar{\mathbf{w}}; \mathbf{u})\| \leq \gamma \|\bar{\mathbf{w}}\|, \quad \gamma \geq 0$$

bzw.

$$(3.7) \quad \|\mathbf{T}(\bar{\mathbf{w}}; \mathbf{u})\|^2 \leq \gamma^2 \|\bar{\mathbf{w}}\|^2 = \gamma^2 (\|\mathbf{w}\|^2 + \|\mathbf{x}_0\|^2), \quad \gamma \geq 0$$

zu lösen ist.

Die Verstärkung γ gilt indirekt als Maß für die Robustheit des dynamischen Systems. Die Grundaufgabe besteht darin, die Robustheit zu optimieren bzw.

$$\gamma^* = \inf\{\gamma \mid \text{es ex. eine Lsg. von (3.6) bzgl. (3.2)}\}$$

zu finden¹. Die Sattelpunktprobleme mit Funktional (3.6) führen jedoch auf Lösungen für ein vorgegebenes $\gamma \in \mathbb{R}^+$, so dass γ^* mit einem übergeordneten Verfahren durch eine Folge von Lösungen² approximiert werden muss.

Der Anfangswert \mathbf{x}_0 kann frei oder auch fest sein. Im Folgenden soll der Anfangswert als Störgröße angenommen werden. D.h. selbst bei Berechnung einzelner Trajektorien zu bestimmten Anfangswerten wird Gleichung (3.7) angewendet. Entsprechend ist zu beachten, dass die Bestimmung bzw. Approximation eines $\gamma^* = \inf \gamma$ auf unterschiedliche Ergebnisse für verschiedene Anfangswerte führen wird. Vielmehr ist die größte gemeinsame Verstärkung γ^* bzgl. aller möglichen Startwerte in Betracht zu ziehen, bzw. suboptimale $\gamma^* + \varepsilon$ zu wählen, welche für alle zulässigen Startwerte auf eine Lösung führen.

Robust-optimale Steuerungen $\mathbf{u}_{\text{rob}}^*$ stabilisieren das System auch unter pessimistischen Störeinflüssen, ebenso wie das ungestörte System stabilisiert werden soll. Der Vergleich mit optimalen Steuerungen $\mathbf{u}_{\text{opt}}^*$ des ungestörten Problems im Sinne des Kapitels 2 bzgl. des Gütemaßes der Steuerung in Form des Wertes des Zielfunktionals führt in der Regel auf erhebliche Unterschiede. Die angestrebte Robustheit wird auf Kosten der Optimalität bzgl. des ungestörten Problems erreicht. Als Kompromiss bietet sich die Wahl $\mathbf{u}_{\text{opt},\varepsilon}^*$ als Lösung von bereits oben erwähnten suboptimalen Sattelpunktlösungen bzgl. $\gamma^* + \varepsilon$ an (vgl. Abschnitt 3.4.2).

Ein anderer Ansatz für robuste Steuerungen wird in [14] verfolgt. Hier wird der direkte Differentialspielansatz mit unverändertem Funktional aus Gleichung (3.4) verwendet. Allgemein muss in diesem Fall eine Norm-Beschränkung für die Störung angenommen werden. Im Gegensatz dazu geschieht dies beim H_∞ -Ansatz implizit und wird daher „*schwach-beschränktes*“ Differentialspiel³ genannt.

Die Informationsstruktur der Steuerungen $\mathbf{u}(\cdot)$ und $\mathbf{w}(\cdot)$ ist bei der Lösung des Sattelpunktproblems von entscheidender Bedeutung. Als Wirkungsgrößen im dynamischen System übernehmen sie die Rolle von Spielern in einem zugehörigen Differentialspiel und werden durch Strategien Γ^u, Γ^w gemäß

$$\mathbf{u}(t) = \Gamma^u(t; \tau_t^u(\mathbf{x})) \quad \mathbf{w}(t) = \Gamma^w(t; \tau_t^w(\mathbf{x}))$$

mit Information $\tau_t^{\{\mathbf{u}/\mathbf{w}\}}(\mathbf{x}) = \left\{ (\mathbf{x}(\sigma), \sigma) \mid \sigma \in [\tau_{1,t}^{\{\mathbf{u}/\mathbf{w}\}}, \tau_{2,t}^{\{\mathbf{u}/\mathbf{w}\}}] \subset [t_0, t_f] \right\}$ über Teile des Trajektorienverlaufes bestimmt. Damit wird zum Ausdruck gebracht, dass die Strategien der

¹*Problem der Verstärkung* engl. „disturbance-attenuation problem“

²in der Literatur als γ -Strategien bezeichnet, siehe [10]

³*schwach-beschränktes Differentialspiel* engl. „soft-constraint game“, siehe [10]

einzelnen Spieler von Teilmengen der Zustandstrajektorie $\mathbf{x}(\cdot)$ abhängen können. Die Diskussion der Auswirkung der verschiedenen Informationsstufen auf die Lösung des Problems wird im Kapitel 3.3.1 vorgenommen. An dieser Stelle seien lediglich die verschiedenen technisch sinnvollen Arten erwähnt:

- (i) „**open-loop**“ $\mathbf{u}(t) = \Gamma^{\mathbf{u}}(t; \{\mathbf{x}_0\})$ - die Steuerung $\mathbf{u}(\cdot)$ wird allein durch den Anfangswert des Zustandes bestimmt, was gewissermaßen einer „*Augen-zu-und-durch*“-Taktik entspricht.
- (ii) „**closed-loop**“ $\mathbf{u}(t) = \Gamma^{\mathbf{u}}(t; \{\mathbf{x}(\sigma) \mid t_0 \leq \sigma \leq t\})$ - die Steuerung kennt den gesamten bisherigen Spielverlauf, dies setzt (aus technischer Sicht) voraus, dass der Zustand $\mathbf{x}(t)$ für alle t gemessen wird *und* gespeichert ist.
- (iii) „**feedback**“ $\mathbf{u}(t) = \Gamma^{\mathbf{u}}(t; \{\mathbf{x}(t)\})$ - d.h. mit *Zustandsrückführung*, wobei die Messungen der Vergangenheit nicht berücksichtigt werden (das Messsystem also ohne Speicher ausgerüstet ist).

Es sei bemerkt, dass aus technischer Sicht noch einige weitere Informationsstrukturen der Strategien möglich sind. Insbesondere die Messung zu bestimmten Zeitpunkten oder zeitverzögerte Messung gehen in besonderer Weise auf technische Gegebenheiten ein (siehe z.B. [11, 10]).

Eine weitere Frage wird aufgeworfen, wenn nicht der *gesamte Zustand*⁴ sondern vielmehr eine *Messgröße*⁵ gemäß $\mathbf{y}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$ zu Verfügung steht. Zunächst jedoch bleiben die Betrachtungen auf die Fälle (i)- (iii) beschränkt.

Bemerkung 3.3 Es ist eine Frage der technischen Gegebenheiten, welche der oben genannten Strategien für die gesuchte robuste Steuerung $\mathbf{u}(\cdot)$ angenommen werden soll. Eine Frage der Auffassung dagegen ist es, welche Informationsstruktur der Störung $\mathbf{w}(\cdot)$ zugerechnet werden soll. Als erstmals der Zusammenhang des hergeleiteten min max-Problems als Differentialspiel interpretiert worden ist (siehe [5]), vertrat man die Auffassung, es handle sich um ein Problem mit einem agierenden und einem reagierenden Spieler (sog. *Stackelberg-Differentialspiel*). In der Regel wird jedoch von den Autoren der einschlägigen Literatur davon ausgegangen, die Strategien der Störungen $\mathbf{w}(\cdot)$ seien **Steuerungen mit Zustandsrückführung**, also zum aktuellen Zeitpunkt informiert über den jeweiligen Zustand des Systems.

3.3 Zwei-Personen Nullsummen Differentialspiele

In diesem Kapitel sollen die wesentlichen Eigenschaften der im letzten Abschnitt hergeleiteten Probleme detaillierter behandelt werden.

Definition 3.4 (Zwei-Personen Nullsummen-Differentialspiel)

Ein **Zwei-Personen Nullsummen-Differentialspiel** wird bestimmt durch

⁴ *gesamter Zustand* engl. „perfect-state“

⁵ *unvollständiger Zustand* engl. „imperfect-state“

- (i) zwei Spieler, repräsentiert durch die Wirkungsgrößen \mathbf{u} und \mathbf{w} , welche auf einem Zeitintervall $[t_0, t_f]$ mit festem Anfangswert t_0 gemäß dem dynamischen System

$$(3.8) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{x}(t_0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{r}(\mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}(t) &\in U \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{w}(t) &\in W \quad \forall t \in [t_0, t_f] \end{aligned}$$

mit $f \in C^1(\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_w}, \mathbb{R}^{n_x})$, $\mathbf{r} \in C^1(\mathbb{R}^{n_x}, \mathbb{R}^{n_r})$, $U \subset \mathbb{R}^{n_u}$, $W \subset \mathbb{R}^{n_w}$, Trajektorien $\mathbf{x}(\cdot) \in \mathcal{X}$ in der Menge der zulässigen Zustandstrajektorien erzeugen;

- (ii) ein Zielfunktional

$$(3.9) \quad \mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}(t)) dt \rightarrow \max_{\mathbf{w}} \min_{\mathbf{u}},$$

mit $l \in C^1(\mathbb{R}^{n_x} \times \mathbb{R}^{n_u} \times \mathbb{R}^{n_w}, \mathbb{R})$

- (iii) und schließlich einer Klasse von Abbildungen mit Strategien $\Gamma^{\mathbf{u}} : [t_0, t_f] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$ bzw. $\Gamma^{\mathbf{w}} : [t_0, t_f] \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}$ entsprechend einer der jeweiligen Steuergröße (bzw. dem Spieler) zugeordneten Informationsstruktur im Sinne des Abschnitts 3.2.2, so dass $\mathbf{u}(t) = \Gamma^{\mathbf{u}}(t, \mathbf{x}(\cdot))$ bzw. $\mathbf{w}(t) = \Gamma^{\mathbf{w}}(t, \mathbf{x}(\cdot))$.

Bemerkung 3.5 Zwei-Personen-Differentialspiele sind eine spezielle Form von allgemeinen Mehrpersonen-Differentialspielen im nichtkooperierenden Sinne, deren Lösung durch das Nash⁶-Gleichgewicht bestimmt ist. Während bei allgemeinen Mehrpersonen-Differentialspielen konkurrierende Spieler eines dynamischen Systems jeweils ein zugeordnetes Zielfunktional minimieren, wirken beide Spieler des Nullsummen-Differentialspiels gemäß der besonderen Formulierung aus Definition 3.4 gleichwertig entgegengesetzt auf ein- und dasselbe Funktional. Die begriffliche Herkunft der Nullsummen-Spiele liegt in der Tatsache, dass im Falle der Existenz des Sattelpunktes die Summe der Minimierungsfunktionale beider Spieler verschwindet.

3.3.1 Sattelpunktprobleme

Um das Sattelpunktproblem bzgl. der Wirkungsgrößen des Systems hervorzuheben, sei zunächst die variationelle Schreibweise des Funktionals aus Gleichung (3.9) durch

$$\mathcal{F}(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot)) = \mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot))$$

ersetzt.

Definition 3.6 (Sattelpunkt)

Ein Nullsummenspiel sei gegeben mit Funktional $\mathcal{F}(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot)) : \mathcal{U} \times \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{R}$, welches durch $\mathbf{u}(\cdot)$ minimiert und $\mathbf{w}(\cdot)$ maximiert werden soll. Das Paar $(\mathbf{u}^*(\cdot), \mathbf{w}^*(\cdot))$ heißt **Sattelpunktlösung** des Nullsummenspiels, wenn

$$(3.10) \quad \mathcal{F}(\mathbf{u}^*(\cdot), \mathbf{w}(\cdot)) \leq \mathcal{F}(\mathbf{u}^*(\cdot), \mathbf{w}^*(\cdot)) \leq \mathcal{F}(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}^*(\cdot))$$

⁶John F. Nash, *1928

für alle zulässigen Strategien $(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot)) \in \mathcal{U} \times \mathcal{W}$ gilt. D.h. die resultierenden Trajektorien erfüllen die Nebenbedingungen und der Wert $\mathcal{F}(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot))$ existiert.

Bemerkung 3.7 Es handelt sich hierbei um einen *Sattelpunkt im spieltheoretischen Sinn*, d.h. nicht jeder solche Sattelpunkt ist auch Sattelpunkt im Sinne der algebraischen Geometrie (vgl. Bemerkung 3.9, [18]).

Mit oberem und unterem Wert

$$\mathcal{F}^+ = \inf_{\mathbf{u}(\cdot)} \sup_{\mathbf{w}(\cdot)} \mathcal{F}(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot)) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{F}^- = \sup_{\mathbf{w}(\cdot)} \inf_{\mathbf{u}(\cdot)} \mathcal{F}(\mathbf{u}(\cdot), \mathbf{v}(\cdot))$$

gilt

$$\mathcal{F}^+ \geq \mathcal{F}^-.$$

Existiert der Wert

$$\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^+ = \mathcal{F}^-,$$

so wird er *Wert des Nullsummenspiels* genannt.

3.3.2 Notwendige Bedingungen für die Lösung des Sattelpunktproblems

Die Ableitung notwendiger Bedingungen wird auf die beiden Extremalaufgaben, die aus der linken bzw. rechten Ungleichung von (3.10) resultieren, zurückgeführt. Es gilt der

Satz 3.8 Sei unter den Voraussetzungen der Definition 3.4 durch Steuerstrategien mit open-loop Information für beide Spieler gemäß

$$(\mathbf{u}^*(\cdot), \mathbf{w}^*(\cdot)) = (\mathbf{\Gamma}^{\mathbf{u}^*}(t, \mathbf{x}_0), \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{w}^*}(t, \mathbf{x}_0))$$

ein Sattelpunkt gegeben. Dann existieren mit der korrespondierenden Sattelpunkttrajektorie $\mathbf{x}^*(\cdot)$ zugehörige adjungierte Zustände $\boldsymbol{\lambda}(\cdot)$ sowie Lagrangemultiplikatoren $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{n_r}$, so dass mit der Hamiltonfunktion gemäß Definition 2.1 folgende Beziehungen auf dem Intervall $[t_0, t_f]$ erfüllt sind:

$$(3.11) \quad H(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}) \leq H(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*) \leq H(\mathbf{x}^*, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{w}^*) \quad \forall \mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}, \mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}$$

sowie

$$(3.12) \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) = \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}^*} \right|_{(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}^*(t), \mathbf{w}^*(t))}, \quad \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \boldsymbol{\nu}^T \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}_f} \right|_{\mathbf{x}_f}.$$

Beweis: siehe [11].

Ein Beweis dieser Aussagen wird auf die notwendigen Bedingungen der beiden Extremalaufgaben der Ungleichungen (3.10) zurückgeführt, wobei sie als voneinander unabhängige Optimalsteuerungsprobleme bei jeweils optimaler Steuerung des Gegenspielers betrachtet werden. (siehe [56, 18, 11, 69]).

Bemerkung 3.9 Die Bestimmung des Sattelpunktes überträgt sich mit den Ungleichungen (3.11) punktweise auf die Hamiltonfunktion. Notwendig für dessen Existenz ist

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)} = \mathbf{0}, \quad \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{w}} \right|_{(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)} = \mathbf{0} \quad \text{sowie} \quad \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u}^2} \right|_{(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)} \geq \mathbf{0}, \quad \left. \frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{w}^2} \right|_{(\mathbf{u}^*, \mathbf{w}^*)} \leq \mathbf{0}.$$

Die Existenz, d.h. Gleichheit von oberem und unterem Wert, ist selbst für recht einfache Funktionen nicht gegeben (siehe[18]). Daher wird vorausgesetzt, dass die Hamiltonfunktion einer *Separabilitätsbedingung*, d.h.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \mathbf{u} \partial \mathbf{w}} = \mathbf{0}$$

genügt. Lässt die Modellbildung diese Bedingung nicht zu, so ist entsprechend der Bemerkungen 3.3 und 3.2 die Reihenfolge von Minimum- bzw. Maximumbildung des ursprünglichen Problems (3.6) beizubehalten und der untere Wert zu berücksichtigen.

Die notwendigen Bedingungen für Probleme mit zustandsabhängigen Steuerstrategien werden analog abgeleitet. Wesentlich dabei ist jedoch, dass nunmehr die veränderten Abhängigkeiten berücksichtigt werden müssen. Insbesondere ergibt sich in Gleichung (3.12)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^*} H(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{u}^*}(t, \mathbf{x}^*), \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{w}^*}(t, \mathbf{x}^*)) = \\ \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} + \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{u}} \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{u}^*}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} + \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{w}^*}(t, \mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*}. \end{aligned}$$

wobei die letzten beiden Terme verschwinden (vgl.[11]). Es ergibt sich

Satz 3.10 *Ist analog zu Satz 3.8 ein Sattelpunkt für ein System mit Zustandsrückführung für beide Spieler gegeben, dann existieren mit der korrespondierenden Sattelpunkttrajektorie $\mathbf{x}^*(\cdot)$ der zugehörige adjungierte Zustand $\boldsymbol{\lambda}(\cdot)$ sowie Lagrangemultiplikator $\boldsymbol{\nu} \in \mathbb{R}^{n_r}$ mit*

$$(3.13) \quad \begin{aligned} \mathbf{u}^*(t) &= \arg \min_{\mathbf{u}(t) \in U} H(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \mathbf{u}(t), \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{w}^*}(t, \mathbf{x}^*)) \\ \mathbf{w}^*(t) &= \arg \max_{\mathbf{w}(t) \in W} H(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{u}^*}(t, \mathbf{x}^*), \mathbf{w}(t)) \end{aligned}$$

und

$$(3.14) \quad \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^*} H(\mathbf{x}^*(t), \boldsymbol{\lambda}(t), \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{u}^*}(t, \mathbf{x}^*), \boldsymbol{\Gamma}^{\mathbf{w}^*}(t, \mathbf{x}^*)), \quad \boldsymbol{\lambda}^T(t_f) = \boldsymbol{\nu}^T \left. \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{x}_f} \right|_{\mathbf{x}_f}$$

auf dem Intervall $[t_0, t_f]$.

Beweis: siehe [56, 11, 18].

Bemerkung 3.11 Die Bestimmungsgleichungen (3.13) setzen die Existenz eines Sattelpunktes voraus und fordern implizit die Vertauschbarkeit von Minimum- und Maximumbildung. Die im Satz 3.10 gewählte Darstellung drückt die Abhängigkeit der Steuerstrategie vom gegenwärtigen Steuerwert des Gegenspielers aus. Wird die Separabilitätsbedingung von Bemerkung 3.9 angenommen, dann wird diese Abhängigkeit verschwinden.

Dynamische Informationsstruktur

Die Beziehungen der Gleichungen (3.13) und (3.14) für Strategien mit dynamischer Informationsstruktur, d.h. Steuerstrategien in Abhängigkeit von mehr als einem Punkt der Zustandstrajektorie, lassen überabzählbar viele Lösungen zu⁷. Um diesen Umstand zu beheben, wird eine zusätzliche Bedingung vorausgesetzt. Hierzu sei analog zu Gleichung (2.9) die Wertefunktion gemäß

$$(3.15) \quad V(\mathbf{x}; t) = V(\mathbf{x}) \Big|_{\mathbf{x}(t)} = \int_t^{t_f} l(\mathbf{x}^*(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \mathbf{w}^*(\tau)) d\tau.$$

mit den optimalen Strategien $\mathbf{u}^*(t) = \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{u}^*}(t, \tau_t^{\mathbf{u}}(\mathbf{x}^*))$ und $\mathbf{w}^*(t) = \mathbf{\Gamma}^{\mathbf{w}^*}(t, \tau_t^{\mathbf{w}}(\mathbf{x}^*))$ und der zugehörigen Trajektorie $\mathbf{x}^*(\cdot)$ mit Anfangswert $\mathbf{x}^*(t) = \mathbf{x}(t)$ definiert. Dann soll durch Strategien $(\mathbf{u}^*(\cdot), \mathbf{w}^*(\cdot))$ eines Systems mit „closed-loop“-Informationsstruktur für jeden Zeitpunkt t eine Sattelpunktlösung gemäß Satz 3.10, d.h. für ein System mit Zustandsrückführung, induziert werden, wenn es eine Wertefunktion gemäß Gleichung (3.15) gibt mit

$$(3.16) \quad \int_t^{t_f} l(\mathbf{x}^1(\tau), \mathbf{u}^*(\tau), \mathbf{w}(\tau)) d\tau \leq V(\mathbf{x}(t)) \leq \int_t^{t_f} l(\mathbf{x}^2(\tau), \mathbf{u}(\tau), \mathbf{w}^*(\tau)) d\tau,$$

und Trajektorien $\mathbf{x}^1(\cdot)$ und $\mathbf{x}^2(\cdot)$ bezüglich der Steuerungen $(\mathbf{u}^*(t), \mathbf{w}(t))$ bzw. $(\mathbf{u}(t), \mathbf{w}^*(t))$ zum Anfangswert $\mathbf{x}(t)$. In diesem Fall wird das System **streng zeitkonsistent** genannt und es ergibt sich, dass nun die dynamischen Informationen über den Zustand der Vergangenheit nicht beachtet werden. Es gilt

Satz 3.12 *Für ein Problem mit „closed-loop“-Informationsstruktur liefert jede Sattelpunktlösung nach Satz 3.10 für Strategien mit Zustandsrückführung (feedback) einen Sattelpunkt des „closed-loop“-Systems.*

Beweis: siehe [11].

Bemerkung 3.13

- (i) Die Annahme der Strategien mit Zustandsrückführung erlaubt damit Zugriff auf eine praktikable und zugängliche Lösung. Dynamische Informationen über den Zustand in der Vergangenheit werden hinfällig.
- (ii) Im Gegensatz zu den Optimalsteuerungsproblemen wird hier das Äquivalent zum Optimalitätsprinzip (siehe Kapitel 2.2.1) zusätzlich gefordert.

3.3.3 Isaacs-Gleichung

Analog zur Herleitung der Hamilton-Jacobi-Bellman-Gleichung (2.10) lässt sich für den Fall der streng zeitkonsistenten Sattelpunktprobleme eine partielle Differentialgleichung der Wertefunktion V aufstellen.

⁷engl. „informationally nonunique“ solutions (s. [11, 8, 7])

Die resultierende *Hamilton-Jacobi-Isaacs-Gleichung*⁸ lautet

$$(3.17) \quad \begin{aligned} 0 &= \min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}} \max_{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) + l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ &= \max_{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}} \min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}} \frac{\partial V(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) + l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Allgemeine Lösungen dieser partiellen Differentialgleichung liefern somit die gesuchten zustandsabhängigen Steuerungen, welche allerdings ebenso wie Lösungen der Gleichung (2.10) für Optimalsteuerungsprobleme nur bei einfachen Systemen mit geringer Dimension des Zustandsraumes konkret zu berechnen sind.

Analog zu den Trajektorien von Optimalsteuerungsproblemen sind die Trajektorien von Sattelpunktlösungen nach Satz 3.10 genau die Charakteristiken von (3.17).

Singuläre Flächen und Barrieren

Besondere Schwierigkeiten bei der Lösung ergeben sich zudem durch das Auftreten von Untermannigfaltigkeiten $\mathcal{S}_i \subset X$ des Zustandsraumes, an denen $V \in C^1(X, \mathbb{R})$ nicht erfüllt ist. Die Charakterisierung einer solchen Fläche \mathcal{S}_i ergibt sich aus den Verknüpfungsbedingungen für die Trajektorien, die \mathcal{S}_i schneiden, berühren oder auf ihr verlaufen. Die wichtigste Unterscheidung folgt aus der Stetigkeit der Wertefunktion. Ist $V(\mathbf{x})$ unstetig auf \mathcal{S}_i , so spricht man von einer *Barriere*, womit bereits namentlich zum Ausdruck gebracht wird, dass diese von optimalen Trajektorien nicht überwunden werden kann. Es handelt sich dagegen um eine *singuläre Fläche*, wenn der Gradient $\partial V(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ oder der Steuerwert eines der beiden Spieler entlang \mathcal{S}_i unstetig ist. Die Lösung von (3.17) hängt dann von den Verknüpfungsbedingungen entlang der singulären Flächen ab, die sich aus den Schalt- und Transversalitätsbedingungen ergeben. Es entstehen eine Vielzahl an verschiedenen Konstellationen, deren Klassifikation u.a. in [11, 69, 56, 14] zu finden ist.

Beispiel 3.14⁹

Das komplexe Verhalten einer Lösung von (3.17) soll an folgendem scheinbar einfachen Beispiel verdeutlicht werden. Betrachtet wird das System zweier Körper, deren Bewegungsgleichungen

$$\begin{aligned} \dot{x}_{1,p} &= v_1 \sin \theta_p & \dot{x}_{1,e} &= v_2 \sin w_e \\ \dot{x}_{2,p} &= v_1 \cos \theta_p & \dot{x}_{2,e} &= v_2 \cos w_e \\ \dot{\theta}_p &= \omega_1 u_p \end{aligned}$$

lauten, wobei $x_{1,p}, x_{2,p}, \theta_p, x_{1,e}, x_{2,e}$ die Zustandsvariablen, u_p, w_e die Steuerungen der Spieler sowie $0 < v_2 < v_1 = 1, \omega_1 = 1$ reelle Konstanten sind. Eine Reduktion des Zustandsraumes durch Transformation auf relative Koordinaten, d.h. $(x_{1,p}, x_{2,p}, \theta_p) = \mathbf{0}$, führt auf das reduzierte System

$$(3.18) \quad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= -u x_2 + v_2 \sin w \\ \dot{x}_2 &= -1 + u x_1 + v_2 \cos w \end{aligned}$$

⁸Rufus P. Isaacs, 1914-1981, bezeichnete die Gleichung als „*Main Equation*“ (s. [56]).

⁹ „*The Homicidal Chauffeur Game*“, siehe [56]

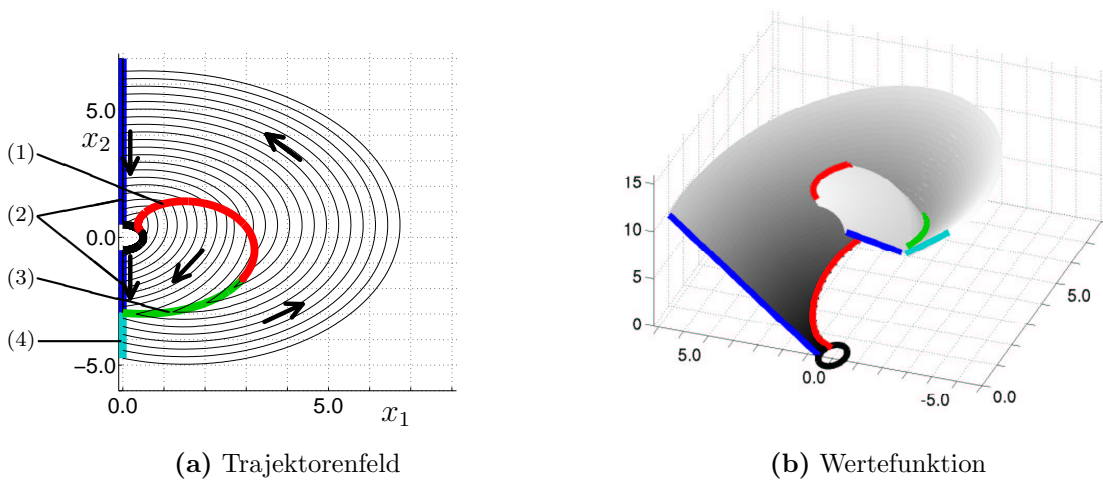


Abbildung 3.1: Trajektorienfeld und Wertefunktion¹⁰ des Beispiels 36 mit den Parametern $\beta = v_2 = 1/2$, Darstellungen der bzgl. $x_1 = 0$ symmetrischen Funktionen nur über der rechten Halbebene $x_1 > 0$.

mit den Zustandsvariablen x_1, x_2 und den Steuerungen u, w . Das Spiel ist beendet, wenn zum Endzeitpunkt t_1 gilt $x_1^2 + x_2^2 - \beta^2 = 0$, d.h. der Abstand zwischen beiden Spielern auf den Wert $\beta > 0$ geschrumpft ist. Der Wert des Spieles wird durch dessen Dauer bewertet, also

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}, u, w) = \int_0^{t_f} 1 \, dt.$$

In Abbildung 3.1 sind Trajektorienfeld und Wertefunktion für die Parameter $\beta = v_2 = 1/2$ dargestellt. Gekennzeichnet sind die singulären Flächen (2) – (4), die das Schaltmuster der optimalen Trajektorien charakterisieren. Zur Erläuterung der Abbildung 3.1(a):

- (1) ist eine **Barriere**, welche von optimalen Trajektorien nicht überwunden werden kann. Diese Eigenschaft ist lokal, denn wie im Fall dieses Beispiels gibt es Lösungen mit veränderter Schaltstruktur, welche das Spiel mit Anfangswerten unterhalb der Fläche (1) in endlicher Zeit beenden. In diesem Fall ist die Wertefunktion entlang der Barriere unstetig, andernfalls ist sie lediglich einseitig definiert.
- (2) sind **Universalflächen**, auf denen optimale Trajektorien nichttangential auftreffen und anschließend auf ihr verlaufen. $V(\mathbf{x})$ und $\partial V(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ sind dort stetig.
- (3) ist **Equivokalfläche**. Nichttangential auftreffende optimale Trajektorien können entlang der singulären Fläche verlaufen oder diese in Richtung des zweiten Teilraumes verlassen. Enthält eine solche singuläre Fläche keine optimale Trajektorie, handelt es sich um eine **Schaltfläche**. Die Steuerung wenigstens eines der Spieler und $\partial V(\mathbf{x})/\partial \mathbf{x}$ sind im allgemeinen unstetig.
- (4) ist eine **Dispersalfläche**, von der sich optimale Trajektorien entfernen. Die Richtung in beide Halbebenen $x_1 > 0$ oder $x_1 < 0$ ist möglich und wird bestimmt durch die

¹⁰Entsprechend [56], unter Vernachlässigung der Ergebnisse von [12].

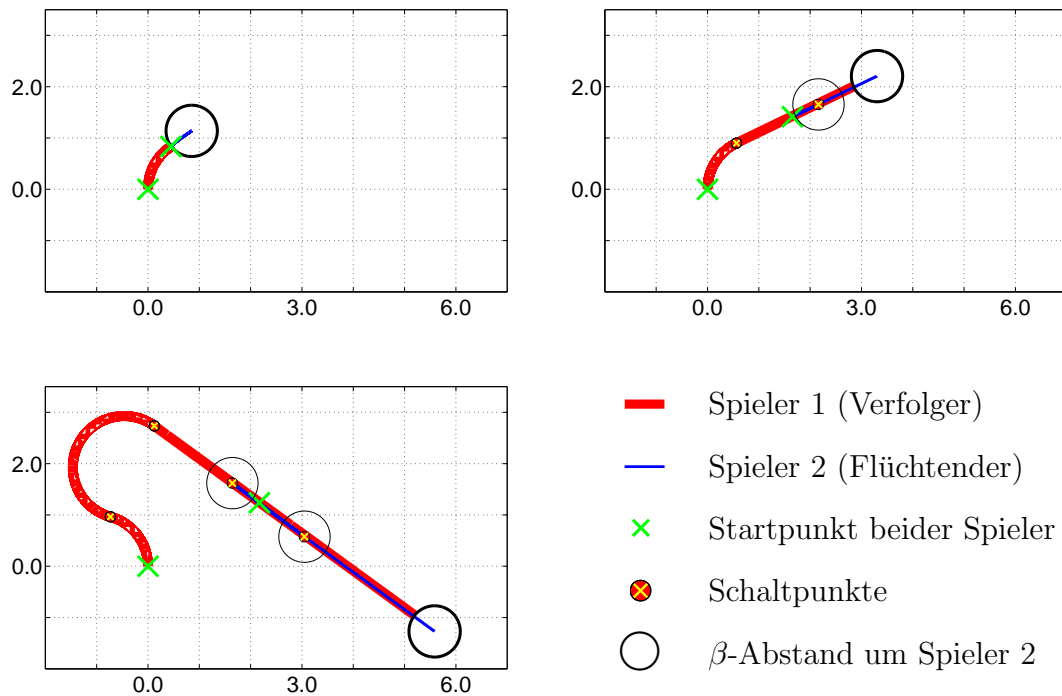


Abbildung 3.2: Trajektorienverlauf des Beispiels 36 in der $(x_{1,e}, x_{2,e})$ -Ebene für 3 verschiedene Startzustände mit 1, 2 bzw. 3 durch Schaltpunkte getrennte Phasen in gewöhnlichen Koordinaten

Entscheidung eines der beiden Spieler, ohne jedoch den Wert des Spieles dadurch zu beeinflussen, denn $V(\mathbf{x})$ ist stetig.

3.3.4 Schwache Lösungen der Isaacs-Gleichung

Hauptsächliches Ziel der bisherigen Untersuchungen robuster Steuerungen in der Literatur ist die numerische Berechnung der Wertefunktion des Sattelpunktproblems (3.6) (siehe [77, 54]). Der Ansatz für Lösungen der Gleichung (3.17) für *nichtlinear-affine Probleme* der Art

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{B}_1(\mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{B}_2(\mathbf{x})\mathbf{w} \\ \mathbf{v} &= \mathbf{C}(\mathbf{x}) + \mathbf{D}(\mathbf{x})\mathbf{u}\end{aligned}$$

wird in der Literatur sehr häufig unter der Annahme $V(\mathbf{x}) \in C^1(X, \mathbb{R})$ diskutiert (siehe [6, 108, 109, 10, 9, 96]). Das Beispiel 36 aus Abschnitt 35 zeigt jedoch, dass $V(\mathbf{x})$ weder als stetig differenzierbar noch als stetig angenommen werden kann. In [4] wird eine bestimmte Annahme bzgl. der Steuerbarkeit des Systems getroffen, die bei nichtlinear-affinen Systemen auf stetige Wertefunktionen führt.

Unter Berücksichtigung der Unstetigkeiten von Wertefunktionen werden schwache Lösungen der Gleichung (3.17) betrachtet (siehe [4, 101, 58] und die dort zitierte Literatur). Es werden

Systeme gemäß

$$(3.19) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ v &= l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

behandelt mit $\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U} \subset L_{2,e}^{n_u}$ und $\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W} = L_{2,e}^{n_w}$. Die gesuchte Steuerung $\mathbf{u}(\cdot)$ und Störung $\mathbf{w}(\cdot)$ ist die Lösung des Sattelpunktproblems mit Funktional

$$(3.20) \quad \mathcal{J}_\gamma(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) - \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 dt \rightarrow \max_{\mathbf{w}} \min_{\mathbf{u}}.$$

Seien

$$V_-(\mathbf{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \inf \{V(\mathbf{x}) \mid \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| < \delta\}, \quad V_+(\mathbf{x}) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \sup \{V(\mathbf{x}) \mid \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\| < \delta\}$$

untere und obere halbstetige Enveloppe von $V(\mathbf{x})$.

Definition 3.15 (Viskositätslösungen)

Für stetiges $\mathcal{F} : X \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n_x} \rightarrow \mathbb{R}$ ist die untere [obere] halbstetige Funktion $V : X \rightarrow \mathbb{R}$ **obere [untere] Viskositätslösung**¹¹ von

$$(3.21) \quad \mathcal{F}(\mathbf{x}, V, \partial V / \partial \mathbf{x}) = 0 \quad \text{in } X$$

wenn für jedes $\phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ und $\mathbf{x} \in \arg \min_{\mathbf{x} \in X} (V - \phi)$ [$\mathbf{x} \in \arg \max_{\mathbf{x} \in X} (V - \phi)$] gilt

$$\mathcal{F}(\mathbf{x}, V(\mathbf{x}), \partial \phi(\mathbf{x}) / \partial \mathbf{x}) \geq 0 \quad [\leq 0].$$

Eine beschränkte Funktion $V(\mathbf{x})$ ist **Viskositätslösung** der Gleichung (3.21), falls V_- obere und V_+ untere Viskositätslösung ist.

Angewendet auf die Hamilton-Jacobi-Isaacs-Gleichung (3.17) für robuste Systeme, d.h.

$$(3.22) \quad 0 = \min_{\mathbf{u}(\cdot) \in \mathcal{U}} \max_{\mathbf{w}(\cdot) \in \mathcal{W}} \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) + l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) - \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2 \right),$$

gilt der folgende Satz

Satz 3.16 Betrachtet werde das System (3.19) mit Funktional (3.20) und es gelte

$$(3.23) \quad \begin{aligned} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) - \mathbf{f}(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{w})\| &\leq L(1 + \|\mathbf{u}\|^q + \|\mathbf{w}\|^q) \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \\ \|\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})\| &\leq L(1 + \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{u}\|^q + \|\mathbf{w}\|^q) \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \quad 0 \leq q < 2 \\ |l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) - l(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}, \mathbf{w})| &\leq L_R(1 + \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^2) \|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\| \\ C_R \|\mathbf{u}\|^2 - L_R(1 + \|\mathbf{u}\|^q + \|\mathbf{w}\|^2) &\leq l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \leq L_R(1 + \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{w}\|^q), \quad C_R \in \mathbb{R}^+ \\ \text{für alle } \|\mathbf{x}\|, \|\tilde{\mathbf{x}}\| &\leq R, \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W, \quad 0 \leq q < 2 \end{aligned}$$

¹¹ obere [untere] Viskositätslösung engl.: viscosity supersolution [subsolution]

sowie

$$(3.24) \quad l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{0}) \geq 0.$$

Sei

$$(3.25) \quad V_\gamma(\mathbf{x}) = \min_{\mathbf{u}} \max_{\mathbf{w}} \mathcal{J}_\gamma(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot), \mathbf{w}(\cdot))$$

lokal beschränkt auf $X \subset \mathbb{R}^{n_x}$, X offen. Dann ist V_γ Viskositätslösung von (3.22).

Beweis: siehe [101].

Bemerkung 3.17 Die Voraussetzungen des Satzes fordern nicht nur Lipschitzstetigkeit von \mathbf{f} und l , sondern beschränken sie durch höchstens quadratisches Wachstum bezüglich \mathbf{u} und \mathbf{w} . Daraus folgt global konkaves Verhalten der Hamiltonfunktion bzgl. der Störung \mathbf{w} , so dass \mathbf{w}^* bei unbeschränktem Steuerbereich W für hinreichend großes γ wohldefiniert ist.

Problematisch ist die Anwendung für Systeme, die nicht dieser Wachstumsbedingung unterliegen. Die Voraussetzungen lassen sich dann übertragen auf Potenzen $p > 1$. Allerdings sollten dann Funktionale $l - \gamma^p \|\mathbf{w}\|^p$ betrachtet werden, so dass die Steuerungen \mathbf{u}^* beschränkt verstärkende Systeme des \mathcal{L}_p erzeugen.

3.4 Trajektorien von Robusten Steuerungen

Anhand der notwendigen Bedingungen von Abschnitt 3.3.2 können Trajektorien von robust-optimal gesteuerten und gestörten Systemen berechnet werden. Aus Aufgabe (3.19, 3.20) ergibt sich folgendes Programm:

Bestimme die Hamiltonfunktion

$$H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \boldsymbol{\lambda}^\top \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) + l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) - \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2$$

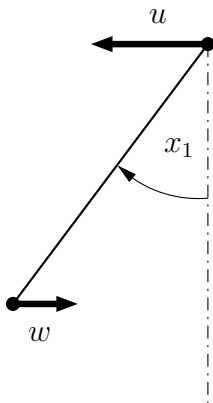
und löse das Randwertproblem

$$(3.26) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}), \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}} &= - \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{\text{rob}}^*, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*)}^\top \boldsymbol{\lambda} - \left. \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}_{\text{rob}}^*, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*)}^\top \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}(t_1) = \mathbf{0}, \quad H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{w})|_{t_1} = 0 \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\text{rob}}^* &= \arg \min_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*), \\ \mathbf{w}_{\text{rob}}^* &= \arg \max_{\mathbf{w} \in W} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}_{\text{rob}}^*, \mathbf{w}). \end{aligned}$$

Beispiel 3.18 Betrachtet werde ein gestörtes und gesteuertes mathematisches Pendel



$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -(ax_2 + b \sin x_1) - u \cos x_1 + w \cos x_1$$

mit $a, b > 0$, $(x_1, x_2)|_{t_0=0} = (x_{10}, x_{20})$, $(x_1, x_2)|_{t_1} = (0, 0)$ und dem Funktional

$$\int_0^{t_1} u^2 + x_2^2 - \gamma^2 w^2 dt.$$

Die Hamiltonfunktion lautet

$$H = \lambda_1 x_2 - \lambda_2 (ax_2 + b \sin x_1 + u \cos x_1 - w \cos x_1) + u^2 + x_2^2 - \gamma^2 w^2,$$

so dass sich

$$u_{\text{rob}}^* = \arg \min_u H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, u, w_{\text{rob}}^*) = \frac{\lambda_2}{2} \cos x_1,$$

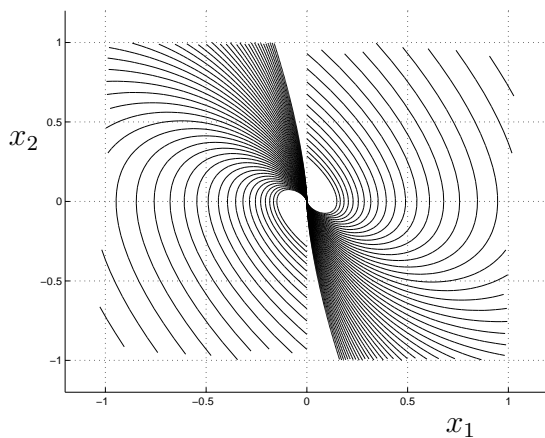
$$w_{\text{rob}}^* = \arg \max_w H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, u_{\text{rob}}^*, w) = \frac{\lambda_2}{2\gamma^2} \cos x_1,$$

und die adjungierten Differentialgleichungen

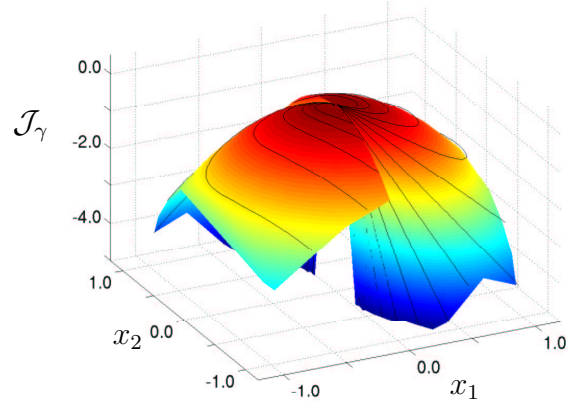
$$\dot{\lambda}_1 = (b \cos x_1 + (w_{\text{rob}}^* - u_{\text{rob}}^*) \sin x_1) \lambda_2$$

$$\dot{\lambda}_2 = -\lambda_1 + a\lambda_2 - 2x_2$$

ergeben (beachte: $\partial^2 H / \partial u^2 = 2 > 0$, $\partial^2 H / \partial w^2 = -2\gamma^2 < 0$). Die Randwerte der Adjungierten bleiben frei, da Start- und Zielwert der Zustandsvariablen gegeben sind. Die Endzeit ist ebenfalls frei, daher gilt $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, u_{\text{rob}}^*, w_{\text{rob}}^*)|_{t_1} = 0$.



(a) Trajektorienfeld



(b) Wertefunktion

Abbildung 3.3: (a) Trajektorienfeld sowie (b) Wertefunktion zum Beispiel 3.18 für $\gamma = 1.1$.

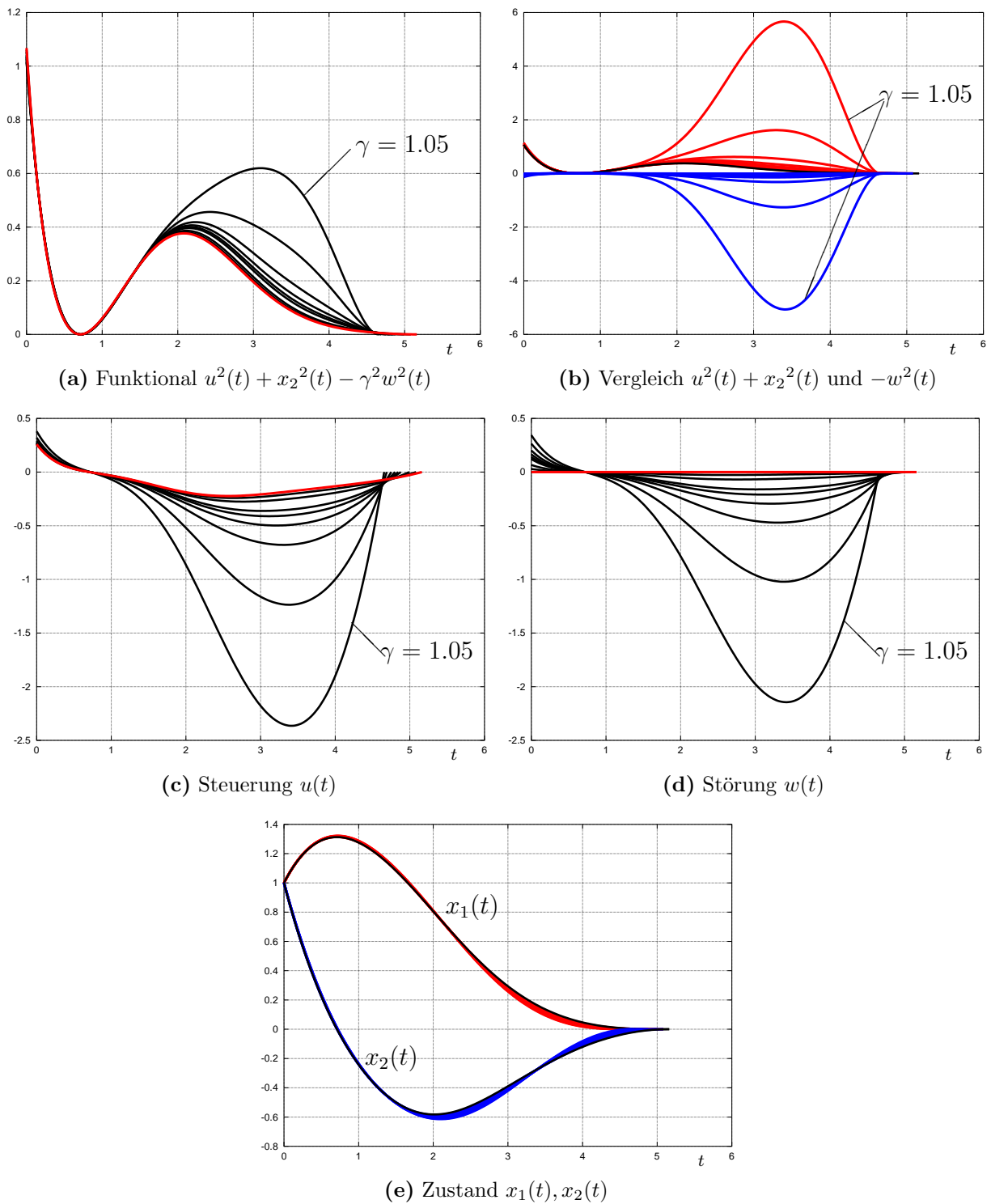


Abbildung 3.4: Trajektorien von Sattelpunktlösungen von Beispiel 3.18 zum Anfangswert $(x_1, x_2) = (1.0, 1.0)$ zu verschiedenen Werten $\gamma = 3.0, 2.0, 1.5, 1.4, 1.3, 1.2, 1.1, 1.05$ sowie des ungestörten, optimal gesteuerten Problems. Die Kurven für $\gamma = 1.05$ sind gekennzeichnet, die weiteren verlaufen jeweils benachbart.

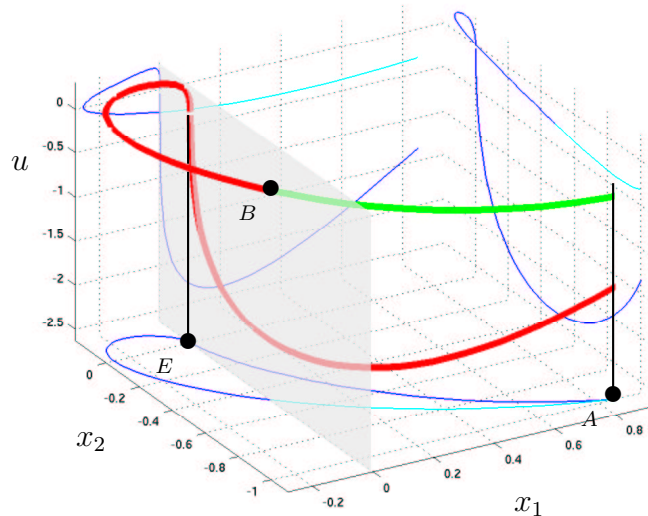


Abbildung 3.5: Darstellung der (x_1, x_2, u) -Kurven zweier Lösungen des Randwertproblems zu Beispiel 3.18 mit Anfangszustand in A und Endzustand in E . Die durch den Punkt B verlaufende Kurve „durchbricht“ die Barriere $x = 0$.

Berechnete Trajektorien sind in Abbildung 3.4 dargestellt. Die positiven Werte des Funktionalintegranden (Abb. 3.4(a)) widersprechen nicht der Forderung $\mathcal{J}_\gamma(\mathbf{x}(\cdot)^*, \mathbf{u}(\cdot)^*, \mathbf{w}^*) \leq 0$ (vgl. Abschnitt 3.2.2, Gl (3.7)), denn wegen $x_0 \neq \mathbf{0}$ muss eine Verschiebung $\beta(\mathbf{x}_0) > 0$ für $x_0 \neq \mathbf{0}$ berücksichtigt werden, so dass $\mathcal{J}_\gamma(\mathbf{x}(\cdot)^*, \mathbf{u}(\cdot)^*, \mathbf{w}^*) - \beta(\mathbf{x}_0) \leq 0$, wie in Abbildung 3.3(b) mit $\beta(\mathbf{x}_0) = \|\mathbf{x}_0\|^2$ zu sehen ist.

3.4.1 Barrieren

Das Bild der Wertefunktion von Beispiel 3.18 in Abbildung 3.3(b) zeigt eine Barriere bei $x_1 = 0$. Dieses Verhalten entspricht der Tatsache, dass das Pendel mit beliebig hohem Aufwand und somit stets ohne Überschwingen in Ruhelage gesteuert werden kann. Allerdings lassen sich Trajektorien (etwa bei Rückwärtsintegration) über die Barriere hinaus fortsetzen. Diese Trajektorien sind dann ebenfalls zulässige Lösungen des Randwertproblems der notwendigen Bedingungen. Abbildung 3.5 zeigt zwei Trajektorien, d.h. Lösungen des Randwertproblems, mit gemeinsamem Anfangspunkt A und Ruhelage E und die zugehörigen Steuerungen $u(x_1, x_2)$. Die Existenz solcher Barrieren ist gegebenenfalls zu bestimmen und berechnete Trajektorien auf ihr Verhalten bzgl. der Barrieren zu überprüfen (siehe [69, 56]).

3.4.2 Störungsdämpfung

Die Abbildungen 3.4(a)- 3.4(e) zeigen einen geringen Einfluss veränderter Funktionale, d.h. verschiedener γ , auf den Verlauf der Zustandsvariablen. Dagegen weisen die Steuerwerte mit

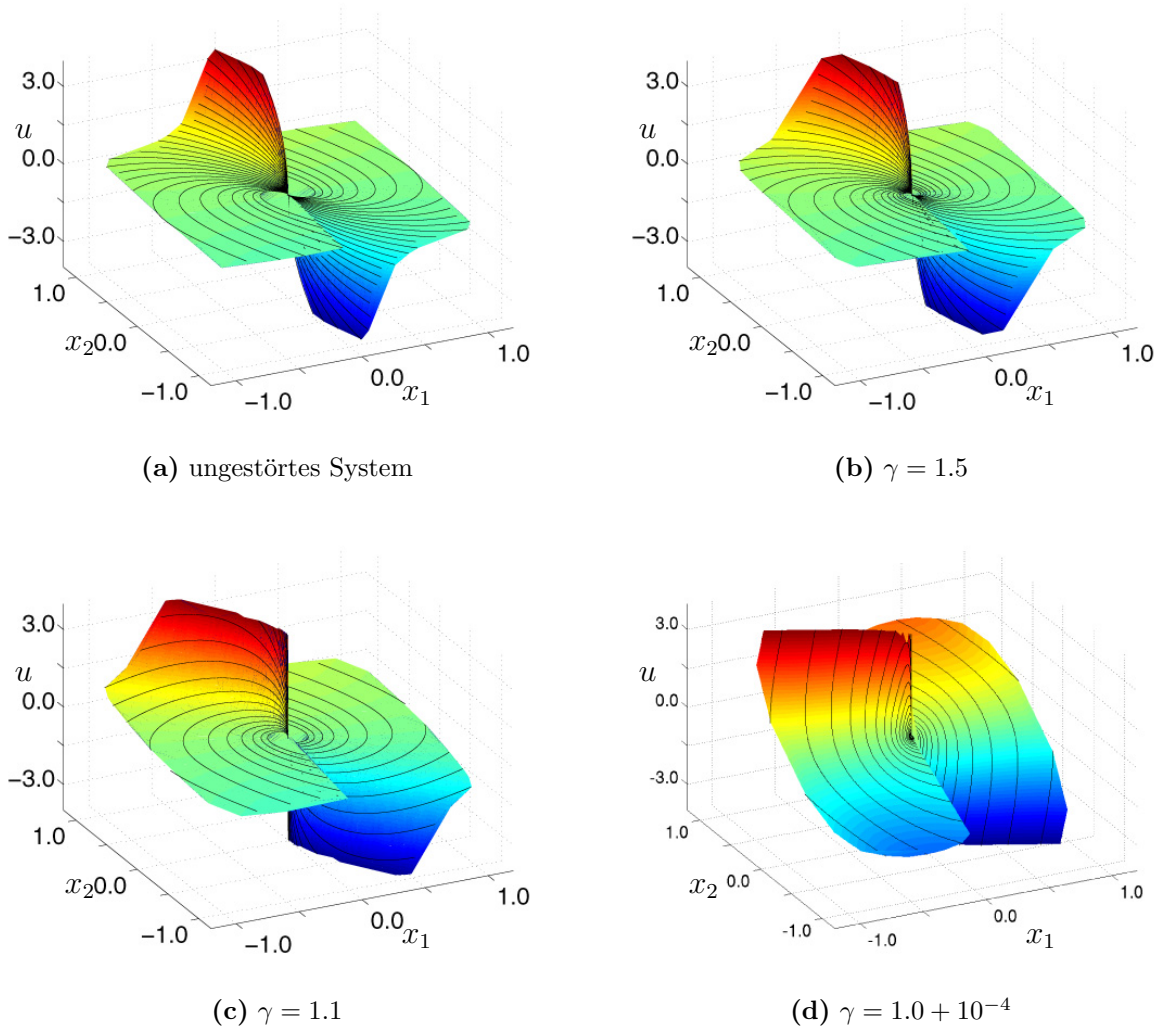


Abbildung 3.6: Zustandsabhängige Steuerfunktionen von Beispiel 3.18 für verschiedene Verstärkungsfaktoren $\gamma = 1.5, 1.1$ und $1.0 + 10^{-4}$ sowie für das ungestörte Problem.

sinkendem γ um so größere Amplituden auf. Das Problem der *Störungsdämpfung*¹² untersucht, wie die Störung \mathbf{w} durch eine Steuerung \mathbf{u} gemäß der Lösung des Sattelpunktproblems gedämpft wird. Das Maß dieser Dämpfung wird durch den maximalen Verstärkungsfaktor γ bewertet. Wird bei der Berechnung der Trajektorien entsprechend dem letzten Abschnitt für fest vorgegebene Verstärkungsfaktoren γ eine Steuerung \mathbf{u}^* gesucht, stellt sich nun die Frage, wie das Verhalten der Lösungen für verschiedene γ -Werte ist und wie groß

$$\gamma^* = \inf\{\gamma \mid \text{es existiert eine Lösung } V_\gamma \text{ von (3.22)}\}$$

der Wert der maximal möglichen Dämpfung ist.

Angenommen, es existieren für ein $\bar{\gamma}$ die Sattelpunktlösungen für $\gamma > \bar{\gamma}$, dann ergibt sich für $\gamma \rightarrow \infty$ punktweise aus $\mathbf{w}_{\text{rob}}^* = \arg \max_{\mathbf{w}} (\boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f} + l - \gamma^2 \|\mathbf{w}\|^2)$ unter den Voraussetzun-

¹² *Störungsdämpfung* engl.: „Disturbance-Attenuation-Problem“

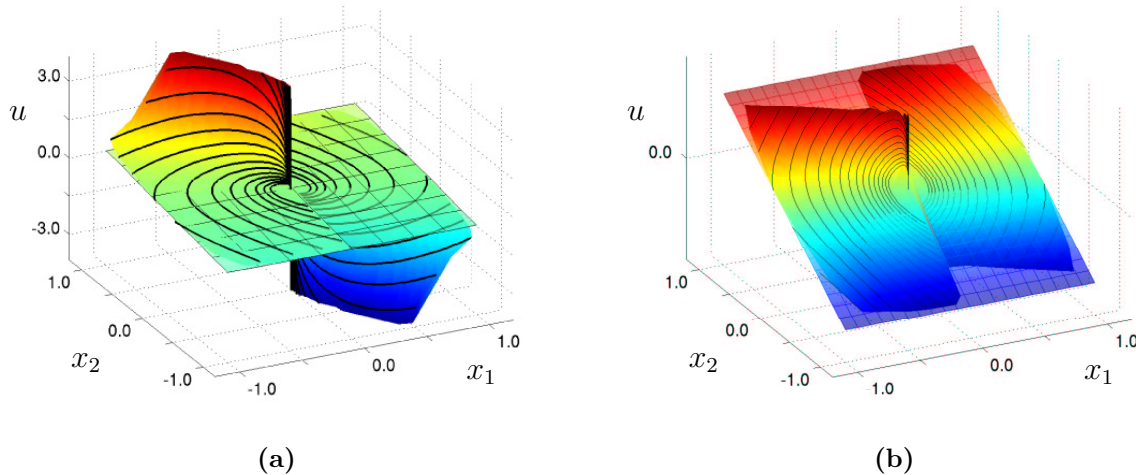


Abbildung 3.7: Zustandsabhängige Steuerfunktion für $\gamma = 1.1$ im Vergleich zur Steuerfunktion des Reglers für das linearisierte Pendelproblem (in verschiedenen Skalen bzgl. der Steuerung u).

gen (3.23) $\|\mathbf{w}_{\text{rob}}^*\| \rightarrow 0$ und damit die optimale Steuerung des ungestörten Problems.

Für die Berechnung bei praktischen Anwendungen bietet es sich an, Homotopieeigenschaften bzgl. des Parameters γ auszunutzen. Ausgehend von der Lösung des ungestörten Optimalsteuerungsproblems kann γ sukzessive verringert werden.

Abbildung 3.6 zeigt für Beispiel 3.18 verschiedene Steuerfunktionen über dem Zustandsraum. Es ist erkennbar, dass sich Lösungen mit einem spürbaren Einfluss der Störung nur für $\gamma < 2$ ergeben. Die Existenz von Lösungen ist für $\gamma = \gamma^*$ in den häufigsten Fällen nicht gegeben, so dass beim praktischen Einsatz auf fast-optimale Regler zurückgegriffen werden muss.

Die Wahl eines fast-optimalen Reglers ist deshalb sinnvoll, da sich für $\gamma \rightarrow \gamma^*$ zumeist sehr *steife Steuergesetze*¹³ ergeben, die in Bezug auf ungestörte Systeme ungewünschtes Schwingungsverhalten verursachen. Die Wahl einer geeigneten Regelung sollte ein Kompromiss zwischen dem ungestört, optimal gesteuerten und dem robust-optimal gesteuerten Problem sein, wobei der Verstärkungsfaktor γ als Parameter dient.

Abbildung 3.7 zeigt einen Vergleich der Ergebnisse des nichtlinearen und linearisierten Pendelproblems. Starke Abweichungen sind insbesondere im Bereich hoher Geschwindigkeiten ($= x_2$) nahe $x_1 = 0$ zu erkennen. Obwohl das linearisierte Problem die Lösung gut zu approximieren scheint, zeigen die numerischen Ergebnisse, dass die Näherung der minimalen Verstärkungsfaktoren mit

$$0.7066648 \approx \gamma_{\text{linear}}^* \neq \gamma_{\text{nichtlinear}}^* = 1.0$$

zu unterschiedlichen Ergebnissen führt.

¹³*steife Steuergesetze* engl. „high-gain controller“, treten insbesondere auch bei linearen H_∞ -Steuerungen für $\gamma \approx \gamma^*$ auf. Die korrespondierende Riccati-Differentialgleichung besitzt in den meisten Fällen bereits für $\gamma = \gamma^*$ einen konjugierten Punkt und liefert somit keine Lösung des Problems (siehe [10]).

3.4.3 Transformation der Aufgabe

Zur numerischen Berechnung von Sattelpunktproblemen muss stets das Randwertproblem der kanonischen Differentialgleichungen (3.26) gelöst werden. Dies ist notwendig, um den Zugriff auf Steuerung *und* Störung während einer numerischen Diskretisierung zu ermöglichen. Berechnungen von hochdimensionalen, sehr komplexen Sattelpunktproblemen als Lösung von Differentialspielen in Zusammenhang mit technischen Anwendungen sind bereits in [15, 16, 65, 86, 100, 52] durchgeführt worden. Wegen der Formulierung des natürlichen Sattelpunktproblems (bzw. Minimierungsproblems bei Optimalsteuerungsproblemen) als Randwertproblem wird dieser Ansatz als *indirekte Methode* bezeichnet (siehe Kapitel 4). Dagegen werden bei den sogenannten *direkten Methoden* endlich-dimensionale diskretisierte Minimierungsprobleme erzeugt, welche zu lösen sind. In Teil II werden diese Verfahren eingehend untersucht.

An dieser Stelle soll ein Ansatz gemäß einem Vorschlag von [53] erläutert werden. Es werden die notwendigen Bedingungen eines Sattelpunktproblems auf ein Minimierungsproblem transformiert. Der Vorteil besteht darin, hierfür die bereits bekannten numerischen Verfahren der direkten Methoden anzuwenden, welche zur Lösung von Optimalsteuerungsproblemen entwickelt worden sind und bis heute einen hohen Entwicklungsstand erreicht haben.

Gemäß der notwendigen Bedingungen (3.26) werden an die Minimierungsaufgabe bezüglich der Steuerung $\mathbf{u}(t)$ neben den Zustandsdifferentialgleichungen ebenso die Differentialgleichungen der adjungierten Variablen angekoppelt, welche ihrerseits unter Verwendung der notwendigen Bedingungen für das Sattelpunktproblem auf eine Lösung für die schlechteste Störung $\mathbf{w}^*(t)$ führen.

Es ergibt sich folgende Aufgabe:

<p>Minimiere</p> $\int_{t_0}^{t_f} l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{w}_{\text{rob}}^*(t)) - \gamma^2 \ \mathbf{w}_{\text{rob}}^*(t)\ ^2 dt \rightarrow \min_{\mathbf{u}}$ <p>unter</p> $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*),$ $\dot{\boldsymbol{\lambda}} = - \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right _{(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*)}^T \boldsymbol{\lambda} - \left. \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} \right _{(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*)}^T,$ $\mathbf{w}_{\text{rob}}^* = \arg \max_{\mathbf{w} \in W} H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{w}),$ $\mathbf{u} \in U,$ $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \mathbf{x}(t_f) = \mathbf{0}, H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*) _{t_f} = 0$ <p>mit</p> $H(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) + l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) - \gamma^2 \ \mathbf{w}\ ^2.$

Da vorausgesetzt wurde, dass bezüglich $\mathbf{w}(\cdot) \in L_{2,e}^{n_w}$ keine weiteren Beschränkungen existieren, folgt

$$(3.27) \quad \left. \frac{\partial H}{\partial \mathbf{w}} \right|_{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*)}^{\text{T}} = \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*)}^{\text{T}} \boldsymbol{\lambda} + \left. \frac{\partial l}{\partial \mathbf{w}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*)}^{\text{T}} - 2\gamma^2 \mathbf{w} = \mathbf{0}.$$

Im Modell muss berücksichtigt werden, dass die Hamiltonfunktion stets konkav bezüglich \mathbf{w} ist. Es ergibt sich eine Funktion

$$\mathbf{w}_{\text{rob}}^* = \mathbf{w}_{\text{rob}}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{u}) = \mathbf{w}_{\text{rob}}^*(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}),$$

deren Abhängigkeiten in den notwendigen Bedingungen für das oben aufgestellte Optimalsteuerungsproblem eingehen. Die letzte Gleichung folgt aus der Separabilitätsbedingung (vgl. Bemerkung 3.9).

Mit dem Adjungiertenvektor $(\bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\text{T}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{\text{T}})$ des erweiterten Zustandsvektors $(\mathbf{x}^{\text{T}}, \boldsymbol{\lambda}^{\text{T}})$ ergibt sich die erweiterte Hamiltonfunktion

$$\bar{H}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}, \bar{\boldsymbol{\lambda}}, \hat{\boldsymbol{\lambda}}, \mathbf{u}) = \bar{\boldsymbol{\lambda}}^{\text{T}} \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*) + \hat{\boldsymbol{\lambda}}^{\text{T}} \dot{\boldsymbol{\lambda}}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*) + l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*) - \gamma^2 \|\mathbf{w}_{\text{rob}}^*\|^2$$

sowie die Differentialgleichungen

$$(3.28) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{\boldsymbol{\lambda}} \\ \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{pmatrix} = - \left[\frac{\partial \bar{H}}{\partial (\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})} \right]^{\text{T}}.$$

Die Differentialgleichungen der Komponenten $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ des erweiterten Adjungiertenvektors lauten

$$(3.29) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\boldsymbol{\lambda}} &= - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \\ &= - \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{rob}}^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}}^{\text{T}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}}^{\text{T}} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial l}{\partial \mathbf{w}}^{\text{T}} - 2\gamma^2 \mathbf{w}_{\text{rob}}^* \right) + \left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{rob}}^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^{\text{T}} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \\ &= \left(\frac{\partial \dot{\boldsymbol{\lambda}}}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{rob}}^*}{\partial \boldsymbol{\lambda}} \right)^{\text{T}} \hat{\boldsymbol{\lambda}} \end{aligned}$$

mit $\hat{\boldsymbol{\lambda}}(t_0) = \hat{\boldsymbol{\lambda}}(t_f) = \mathbf{0}$ und daher $\hat{\boldsymbol{\lambda}} \equiv \mathbf{0}$. Für die verbleibenden Komponenten ergibt sich damit analog

$$(3.30) \quad \begin{aligned} \frac{d}{dt} \bar{\boldsymbol{\lambda}} &= - \frac{\partial \bar{H}}{\partial \mathbf{x}} \\ &= - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{rob}}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^{\text{T}} \bar{\boldsymbol{\lambda}} \\ &\quad - \left(\frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial l}{\partial \mathbf{w}} \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{rob}}^*}{\partial \mathbf{x}} \right)^{\text{T}} + 2\gamma^2 \mathbf{w}_{\text{rob}}^*{}^{\text{T}} \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{rob}}^*}{\partial \mathbf{x}} \\ &= - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}^{\text{T}} \bar{\boldsymbol{\lambda}} - \frac{\partial l}{\partial \mathbf{x}}^{\text{T}} - \frac{\partial \mathbf{w}_{\text{rob}}^*}{\partial \mathbf{x}}^{\text{T}} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{w}}^{\text{T}} \bar{\boldsymbol{\lambda}} + \frac{\partial l}{\partial \mathbf{w}}^{\text{T}} - 2\gamma^2 \mathbf{w}_{\text{rob}}^* \right), \end{aligned}$$

so dass λ und $\bar{\lambda}$ wegen (3.27) identischen Differentialgleichungen mit identischen Randbedingungen genügen. Schließlich wird

$$\begin{aligned}
 \mathbf{u}_{\text{rob}}^* &= \arg \min_{\mathbf{u} \in U} \bar{H}(\mathbf{x}, \lambda, \bar{\lambda}, \hat{\lambda}, \mathbf{u}) \\
 &= \arg \min_{\mathbf{u} \in U} \bar{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*) + \hat{\lambda}^T \dot{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*) + l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*) - \gamma^2 \|\mathbf{w}_{\text{rob}}^*\|^2 \\
 (3.31) \quad &= \arg \min_{\mathbf{u} \in U} \bar{\lambda}^T \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*) + l(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*) - \gamma^2 \|\mathbf{w}_{\text{rob}}^*\|^2 \\
 &= \arg \min_{\mathbf{u} \in U} H(\mathbf{x}, \lambda, \mathbf{u}, \mathbf{w}_{\text{rob}}^*)
 \end{aligned}$$

berechnet. Insgesamt folgt die Konsistenz der zugehörigen notwendigen Bedingungen erster Ordnung für das ursprüngliche Sattelpunktproblem bzw. das erzeugte Optimalsteuerungsproblem.

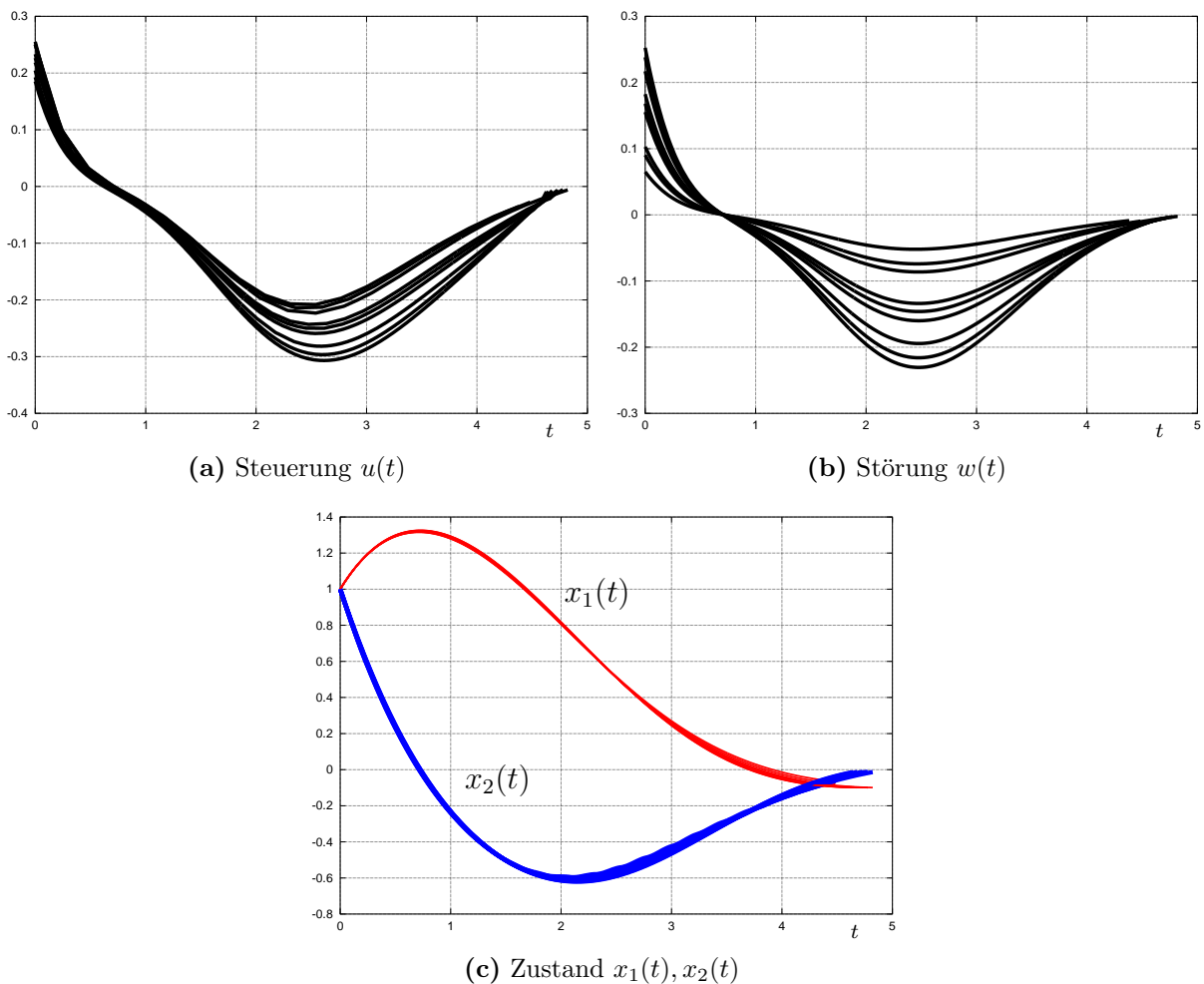


Abbildung 3.8: Trajektorien von Sattelpunktlösungen von Beispiel 3.19 zum Anfangswert $(x_1, x_2) = (1.0, 1.0)$ zu verschiedenen Werten für den Verstärkungsfaktor $\gamma = 2.0, 1.7, 1.5, 1.3, 1.25, 1.2, 1.1, 1.05, 1.02$. Zum Vergleich: Die Lösungen von Abbildung 3.4 (zum Beispiel 3.18, wurden) mit einem Randwertlöser berechnet.

Beispiel 3.19 Betrachtet wird wieder das gestörte und gesteuerte mathematische Pendel von Beispiel 3.18. Das aus der Transformation resultierende erweiterte Optimalsteuerungsproblem lautet

$$\int_0^{t_f} u^2 + x_2^2 - \gamma^2 w_{\text{rob}}^{*2} dt \rightarrow \min_{\mathbf{u}}$$

unter

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -(ax_2 + b \sin x_1) - u \cos x_1 + w_{\text{rob}}^* \cos x_1 \\ \dot{\lambda}_1 &= (b \cos x_1 + (w_{\text{rob}}^* - u) \sin x_1) \lambda_2 \\ \dot{\lambda}_2 &= -\lambda_1 + a \lambda_2 - 2x_2 \end{aligned}$$

mit

$$w_{\text{rob}}^* = \frac{\lambda_2}{2\gamma^2} \cos x_1$$

und den Randbedingungen $(x_1, x_2)|_{t_0=0} = (x_{10}, x_{20})$, $(x_1, x_2)|_{t_f} = (0, 0)$. Die Randwerte der adjungierten Variablen sind frei, die freie Endzeit ergibt $H = \sum_i \lambda_i \dot{x}_i + u^2 + x_2^2 - \gamma^2 w_{\text{rob}}^{*2} = 0$ bei $t = t_f$.

Die numerischen Berechnungen zeigen, dass das Verfahren nur mit sehr vielen Gitterpunkten konvergiert und keine befriedigenden Fehlerschranken zulässt. Desweiteren ergeben sich häufig Lösungen mit mehrfachem Überschwingen (vgl. Abschnitt 3.4.1, Barrieren). Um den Lösungsprozess zu vereinfachen, wird die Endzeit t_f nach oben beschränkt. Die Konvergenz

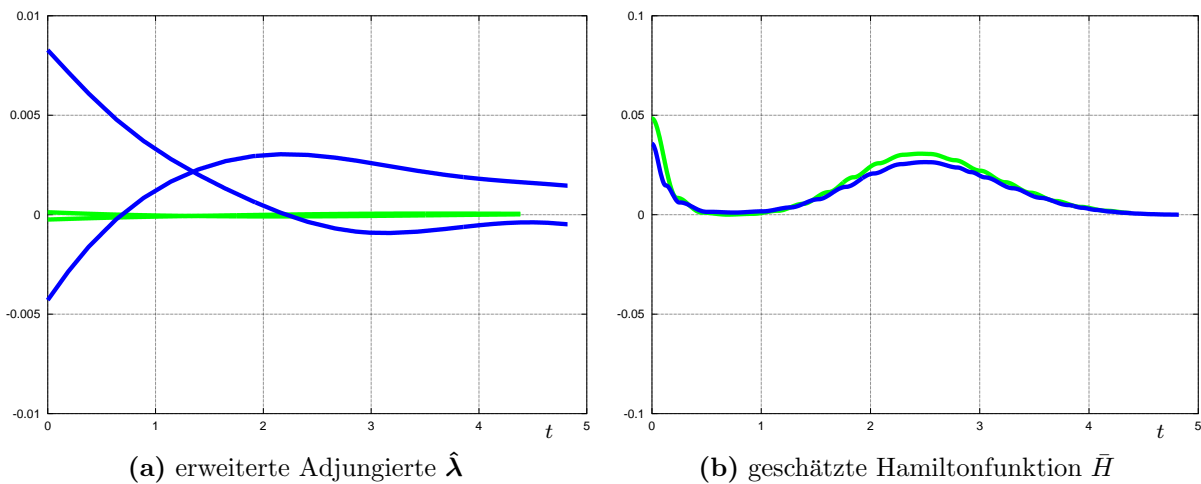


Abbildung 3.9: Testfunktionen zur Überprüfung der Genauigkeit der berechneten Lösungen von Abbildung 3.8, hier für $\gamma = 2.0$ (hell) sowie $\gamma = 1.5$ (dunkel). Alle Funktionen müssen für eine exakte Lösung verschwinden. Als Verfahren wurde ein Kollokationsverfahren nach Abschnitt 4.2.4 verwendet. Es ist allerdings zu beachten, dass neben dem Fehler in den berechneten Lösungen zusätzlich Schätzfehler bei den hier abgebildeten Größen auftreten.

verbessert sich, wobei die Endzeiten der Lösungen nicht auf der Beschränkung liegen. Desweiteren wird alternativ zu $(x_1, x_2)|_{t_f} = (0, 0)$ die Endbedingung $x_1(t_f)^2 + x_2(t_f)^2 = \varepsilon^2$ mit $|\varepsilon| \ll 1$ gewählt. Zusätzlich ergibt sich gemäß Abschnitt 2.2.3 die Randbedingung $x_1(t_f)\lambda_2(t_f) - x_2(t_f)\lambda_1(t_f) = 0$ für die adjungierten Variablen. Erst diese Modifikation ermöglicht Berechnungen von robust-optimalen Steuerungen für $\gamma \rightarrow 1$.

Abbildung 3.8 zeigt analog zu Abbildung 3.4 für Beispiel 3.18 mehrere Verläufe von Steuerungen $u(t)$, Störungen $w(t)$ und Zustandstrajektorien $(x_1(t), x_2(t))$ für eine Folge von verschiedenen Werten $2 > \gamma > 1$. Zu erkennen sind wiederum die Wachstumseigenschaften insbesondere der Störungen, aber auch der Steuerungen. Die Zustandstrajektorien bleiben nahezu unverändert. Deutlich zu erkennen sind die im Vergleich zur ursprünglichen Aufgabe veränderten Randbedingungen bei $t = t_f$.

In Abbildung 3.9 sind Verläufe der erweiterten Adjungierten $\hat{\lambda}(t)$ sowie der Hamiltonfunktion \bar{H} dargestellt. Das verwendete Verfahren liefert hierfür Schätzungen ohne direkte Berechnung. Den Ausführungen am Anfang des Abschnittes zu Folge verschwinden diese bei exakter Lösung und erlauben damit einen Test für die erlangte Genauigkeit. Die Auswertung der Ergebnisse lässt darauf schließen, dass mit größerer Nähe des Verstärkungsfaktors γ an $1 = \gamma^*$ Lösungen immer unzuverlässiger werden. Dies zeigt auch der Vergleich der berechneten Steuerungen mit denen des Beispiels 3.18.

Diskussion der Transformation

Die Behandlung des Beispiels 3.19 zeigt wesentliche Eigenschaften, die bei der Bearbeitung von Sattelpunktproblemen für robust-optimale Steuerungen auftreten.

- (i) Berechnungen von transformierten Aufgaben, d.h. mit Erweiterung um die adjungierten Differentialgleichungen, für das ungestörte Problem sind in der Regel verhältnismäßig genau. Die Startlösung der adjungierten Variablen kann durch eine Schätzung des ungestörten einfachen Optimalsteuerungsproblems geliefert werden.
- (ii) Für Verstärkungsfaktoren $\gamma > \gamma^*$, bei denen die Größe der zugehörigen Störung messbaren Einfluss auf die Lösung des Problems hat, werden mit sinkendem γ zunehmend *Konvergenzprobleme* spürbar. Ein *Kompromiss* wird mit größeren Fehlerschranken, d.h. mit geringerer Genauigkeit erreicht. Eine Vermutung ist, dass die Differentialgleichung (3.29) der adjungierten Variable $\hat{\lambda}$ nur für große Werte $\gamma \gg \gamma^*$ dämpfend wirkt. Es empfiehlt sich eine entsprechende Stabilitätsuntersuchung.
- (iii) Eine *Automatisierung* von sogenannten γ -Strategien, d.h. automatischer Suche von zulässigen minimalen bzw. fast-minimalen Verstärkungsfaktoren ist wünschenswert. Denkbar sind übergeordnete Verfahren wie etwa Bisektion. Die Erfahrung zeigt allerdings, dass dies nur bedingt möglich ist, da die Lösungen hierfür mit einer gewissen Sicherheit konvergieren müssen.
- (iv) Grundsätzlich werden zur Berechnung des transformierten Problems sehr genaue Lösungen benötigt, da die *Konsistenzbedingungen* nur für $\lambda(t) = \bar{\lambda}(t)$ gelten, wobei es sich um die Gleichheit von durch das Verfahren schätzbaren und tatsächlich

berechneten adjungierten Variablen handelt. Es wäre daher wünschenswert, vom Verfahren eine genaue Schätzung der adjungierten Variablen zu erhalten, welche dann in Gleichung (3.27) eingeht und zur Berechnung der schlechtesten Störung $\mathbf{w}_{\text{rob}}^*$ verwendet wird. In Kapitel 7.5 werden nichtlineare robuste Steuerungen für einen Fahrzeugschwingungsdämpfer berechnet. Abbildung 7.10 stellt einen Vergleich der für dieses Problem geschätzten und berechneten adjungierten Variablen dar und gibt damit einen Eindruck von der realen Konsistenz der Lösung.

- (v) Entgegen der kritischen Einschätzung sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass gerade bei *komplexer Schaltstruktur* der gesuchten robust-optimalen Steuerung die Formulierung des zugehörigen Randwertproblems bei Verwendung indirekter Verfahren einen erheblichen Aufwand erfordert. Die Berechnungen des Kapitels 7.5 zeigen, dass dies bei dieser Methode entfällt. Allerdings ist bei allgemeinen Zwei-Personen-Nullsummen-Differentialspielen die Schaltstruktur beider Steuerungen zu beachten, d.h. Schaltstrukturen der nicht durch die Diskretisierung berechneten Steuerung - wie in diesem Fall die Störung - müssen bei der Aufstellung des angekoppelten Randwertproblems berücksichtigt werden.
- (vi) Das Auftreten singulärer Flächen führt bei der Berechnung von Lösungen von Differentialspielen auf besondere Schwierigkeiten. Bei Anwendung direkter Verfahren, bislang nur nach Ansätzen von [53] und [93] bekannt, werden die singulären Flächen durch die Diskretisierung *nicht* erkannt und angezeigt (siehe Abb. 3.5).

Teil II

Numerische Lösung nichtlinearer Steuerungsprobleme

Kapitel 4

Numerische Methoden der Diskretisierung

In den Anwendungen treten in der Regel sehr komplexe Problemstellungen auf, bei denen bereits die Formulierung als mathematisches Problem großen Aufwand erfordert. Optimalsteuerungsprobleme sind dann nur approximativ durch numerische Verfahren lösbar. Im folgenden Abschnitt sollen Aufgaben

$$\begin{aligned}
 \mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) &= \Phi(\mathbf{x}(t_f)) \rightarrow \min \\
 \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\
 \mathbf{r}_0(\mathbf{x}(t_0)) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_f(\mathbf{x}(t_f)) = \mathbf{0} \\
 \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) &\geq \mathbf{0} \quad \forall t \in [t_0, t_f] \\
 \mathbf{u}(t) &\in U \quad \forall t \in [t_0, t_f]
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

besprochen werden. Gesucht wird der optimale Steuerprozess $(\mathbf{x}^*(\cdot), \mathbf{u}^*(\cdot)) \in \mathcal{X} \times \mathcal{U}$, beschrieben durch Zustandsvariablen $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ und Steuervariablen $\mathbf{u}(t) \in U \subset \mathbb{R}^{n_u}$, der das reellwertige Funktional $\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot))$ minimiert. Die Aufgabe (4.1) ist äquivalent zur Grundaufgabe (2.15) aus Kapitel 2.3. Eine entsprechende Umformung ergibt sich aus der Erweiterung des Zustandsvektors aus Aufgabe (2.15) durch die Variable x_{n_x+1} mit Ableitung

$$\dot{x}_{n_x+1} = l(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)), \quad x_{n_x+1}(t_0) = 0.$$

In anderer Richtung folgt die Äquivalenz aus

$$\Phi(\mathbf{x}(t_f)) = \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) dt.$$

Im Folgenden wird von festen Anfangs- und Endzeitpunkten ausgegangen, was durch eine Transformation stets erreicht werden kann.

Eine numerische Lösung von (4.1) ist auf einem Zeitgitter

$$\Delta = \{t_k \mid t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} < t_N = t_f\}$$

gegeben. Abhängig von der Diskretisierung kann es verschiedene Gitter für Zustands- und Steuervariablen geben. Diese sind durch $\Delta_{\mathbf{x}}$ und $\Delta_{\mathbf{u}}$ gekennzeichnet. Die Länge jedes Teilintervalls wird durch $h_k = t_{k+1} - t_k$ beschrieben.

Im Wesentlichen können die Verfahren zur Lösung des Optimalsteuerungsproblems (4.1) in zwei Klassen unterteilt werden.

- (i) Numerische Lösung des Randwertproblems, das sich aus den notwendigen Bedingungen des Minimumprinzips (siehe Kapitel 2.2) ergibt. Diese Verfahren sind eine Diskretisierung des Randwertproblems der kanonischen Differentialgleichungen. Sie werden daher **indirekte Verfahren** genannt.
- (ii) Bei **direkten Methoden** wird dagegen das System der Zustandsdifferentialgleichungen diskretisiert und in ein nichtlineares diskretes Minimierungsproblem überführt, welches zu lösen ist.

Der Vergleich von direkten und indirekten Verfahren zeigt, dass beide Methoden sehr spezifische Vor- und Nachteile besitzen.

- Indirekte Verfahren erfordern stets die Formulierung des adjungierten Differentialgleichungssystems. Deren Bestimmung durch andere Verfahren, etwa automatisches Differenzieren (siehe z. B. [78]) ist möglich.
- Die numerische Lösung des Randwertproblems basiert auf iterativen Verfahren (vgl. Abschnitt 4.1), die in der Regel nur bei sehr guten Anfangsschätzungen konvergieren.
- Zudem ist für eine korrekte Formulierung des Mehrstufenrandwertproblems die genaue Kenntnis der Schaltstruktur notwendig.

Diese Eigenschaften werden im Allgemeinen als nachteilig angesehen. In der Tat führt der Lösungsprozess nur bei hohem fachlichen Wissen und Kenntnis über das behandelte System zum Erfolg. Insbesondere die Verwendung von Homotopietechniken bei schlechten Startwerten ist ein aufwendiger Prozess, der Intuition und Kenntnis über das komplexe Systemverhalten erfordert.

- Der Vorteil eines indirekten Verfahrens liegt in der sehr hohen Genauigkeit der Lösungen, die bei direkten Verfahren nicht erreicht wird.

Direkte Verfahren erweisen sich gegenüber den aufwendigen Vorbereitungen bei der Anwendung indirekter Verfahren als vergleichsweise benutzerfreundlich:

- Adjungierte Differentialgleichungen sind nicht erforderlich. Numerische Approximationen der adjungierten Variablen können berechnet werden (vgl. z. B. [41, 115]).
- Gegenüber schlechten Startschätzungen sind sie robust und
- Berechnungen mit Startwerten ohne spezielle Schaltstruktur liefern häufig akzeptable Lösungen für weitere Berechnungsschritte.

Grundsätzlich gilt: Genaue Lösungen werden durch hohen Aufwand bezahlt. Auch direkte Verfahren liefern genauere Lösungen, wenn durch Angabe der Jacobimatrizen der dynamischen Gleichungen bessere Gradienten und durch übergeordnete Iterationen Schrittweitenkontrolle zur Verfügung gestellt werden.

Die konkreten Anforderungen und Zielstellungen der Aufgabe bestimmen, welche numerischen Diskretisierungen zur Anwendung kommen.

sowie in den Randbedingungen

$$\begin{aligned} & \mathbf{r}_0(\bar{\mathbf{z}}(t_{s_0})), \\ & \mathbf{r}_f(\bar{\mathbf{z}}(t_{s_N}; t_{s_{N-1}}, \bar{\mathbf{z}}(t_{s_{N-1}}))). \end{aligned}$$

Hierbei steht

$$\bar{\mathbf{z}}(t_{s_i}; t_{s_{i-1}}, \bar{\mathbf{z}}(t_{s_{i-1}})) = \bar{\mathbf{z}}(t; t_{s_{i-1}}, \bar{\mathbf{z}}(t_{s_{i-1}})) \Big|_{t=t_{s_i}}$$

für die Lösung der numerischen Integration des dynamischen Systems an der Stelle t_{s_i} mit Anfangswert $\bar{\mathbf{z}}(t_{s_{i-1}})$ an der Stelle $t_{s_{i-1}}$. Die Fragestellung reduziert sich auf die Nullstellensuche der $(N-2) \cdot n_y + n_{r_0} + n_{r_f}$ Gleichungen der Defekte für $N \cdot n_y$ Unbekannte als Werte der Lösungstrajektorie an den Gitterpunkten t_{s_i} für $i = 0, \dots, N-1$. Dabei ist $n_y = 2n_x$, da es sich um das System der Zustands- und Adjungiertendifferentialgleichungen handelt.

Die Nullstellensuche wird in der Praxis mit *Modifikationen des Newton-Verfahrens* durchgeführt, welche die numerischen Eigenschaften des Verfahrens wesentlich beeinflussen. Obwohl die numerische Integration in aller Regel sehr genau und schnell ist, besitzen die indirekten Verfahren sehr eingeschränkte Konvergenzeigenschaften, bedingt durch den Konvergenzbereich des verwendeten Newton-Verfahrens.

Die Anwendung von Newton-Verfahren erfordert eine numerische Bestimmung der Jacobi-matrix

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{z}}_{s_i}} \begin{pmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{r}_{N-1} \\ \mathbf{r}_0 \\ \mathbf{r}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{W}_{s_1} & \mathbf{I} & & & & & \\ & -\mathbf{W}_{s_2} & \mathbf{I} & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & -\mathbf{W}_{s_{N-1}} & \mathbf{I} \\ \mathbf{r}_{0z_0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & & \mathbf{0} & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & & \mathbf{r}_{fz_f} \mathbf{W}_{s_N} & \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{W}_{s_i} = \frac{\partial \bar{\mathbf{z}}(t; t_{s_{i-1}}, \bar{\mathbf{z}}(t_{s_{i-1}}))}{\partial \bar{\mathbf{z}}(t_{s_{i-1}})} \Big|_{t=t_{s_i}} \quad \text{für } i = 1, \dots, N,$$

$$\mathbf{r}_{0z_0} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{z}_0} \Big|_{\bar{\mathbf{z}}(t_0)}, \quad \mathbf{r}_{fz_f} = \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{z}_f} \Big|_{\bar{\mathbf{z}}(t_f)}.$$

Obwohl die Jacobimatrix eine dünn besetzte Bandstruktur aufweist, erfordert die Berechnung der \mathbf{W}_{s_i} durch Differenzenquotienten eine sehr hohe Anzahl von zusätzlichen numerischen Integrationen des dynamischen Systems. Alternativ wird zumeist auf *numerische Integration der Sensitivitätsmatrix* zurückgegriffen (vgl. Bemerkung 1.4(ii)). In [106] werden Techniken beschrieben, welche den Aufwand zur Berechnung Jacobi-Matrix reduzieren können.

In der Literatur gibt es eine Reihe von Programmen, die bereits erfolgreich bei der Berechnung von Optimalsteuerungsproblemen eingesetzt wurden: BOUNDSOL, OPTSOL (siehe [20]), DLOPTR (siehe [27, 26]), BNDSO (siehe [42]) und MUMUS (siehe [49, 50]).

4.2 Direkte Verfahren

Das Prinzip der direkten Verfahren beruht auf der Transformation des Optimalsteuerungsproblems (4.1) in ein nichtlineares diskretes Minimierungsproblem. Hierzu werden die Steuervariablen \mathbf{u} auf einem Gitter $\Delta_{\mathbf{u}}$ durch Werte $\mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k) \in U \subset \mathbb{R}^{n_u}$ approximiert. Abhängig von der Diskretisierung der Zustandsdifferentialgleichungen ergibt sich eine Approximation der Zustandsvariablen $\mathbf{x}_k = \mathbf{x}(t_k) \in X \subset \mathbb{R}^{n_x}$ auf $\Delta_{\mathbf{x}}$.

Für ein Einschrittverfahren mit Verfahrensfunktion $\mathbf{f}^h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ auf dem Gitter $\Delta = \Delta_{\mathbf{x}} = \Delta_{\mathbf{u}}$ ergibt sich ein diskretes Minimierungsproblem

$$(4.3) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta) &= \Phi(\mathbf{x}_N) \rightarrow \min \\ \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h_k \mathbf{f}^h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \quad \forall k = 0, 1, \dots, N-1, \\ \mathbf{r}_0(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{0}, \quad \mathbf{r}_f(\mathbf{x}_N) = \mathbf{0}, \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) &\geq \mathbf{0} \quad \forall k = 0, 1, \dots, N, \\ \mathbf{u}_k &\in U \quad \forall k = 0, 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Dabei bleibt die Behandlung des Integrationsverfahrens zunächst offen. Einerseits kann es als rekursives Integrationsschema im Sinne einer numerischen Lösung des Einschrittverfahrens betrachtet werden. Andererseits ist eine Ankopplung als Gleichungsnebenbedingung mit freien Variablen $(\mathbf{x}_k)_{k=0, \dots, N}$ denkbar. In diesem Fall erhalten wir das erweiterte Funktional

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}^e(\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta, \boldsymbol{\kappa}^\Delta, \boldsymbol{\sigma}^\Delta, \boldsymbol{\eta}^\Delta) &= \Phi(\mathbf{x}_N) + \boldsymbol{\eta}_0^\top \mathbf{r}_0(\mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\eta}_f^\top \mathbf{r}_f(\mathbf{x}_N) \\ &+ \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top \left(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1} + h_k \mathbf{f}^h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \right) + \sum_{k=0}^N (h_k \boldsymbol{\sigma}_k^\top) \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \end{aligned}$$

mit Lagrangemultiplikatoren $\boldsymbol{\eta}_0, \boldsymbol{\eta}_f, (\boldsymbol{\kappa}_k)_{k=1, \dots, N}$ und $(\boldsymbol{\sigma}_k)_{k=0, \dots, N}$ und Parametervektoren

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\Delta &= (\mathbf{x}_0^\top, \dots, \mathbf{x}_N^\top) \in \mathbb{R}^{n_x \times (N+1)}, \\ \mathbf{u}^\Delta &= (\mathbf{u}_0^\top, \dots, \mathbf{u}_N^\top) \in \mathbb{R}^{n_u \times (N+1)}, \\ \boldsymbol{\kappa}^\Delta &= (\boldsymbol{\kappa}_1^\top, \dots, \boldsymbol{\kappa}_N^\top) \in \mathbb{R}^{n_x \times N}, \\ \boldsymbol{\sigma}^\Delta &= (\boldsymbol{\sigma}_0^\top, \dots, \boldsymbol{\sigma}_N^\top) \in \mathbb{R}^{n_g \times (N+1)}, \\ \boldsymbol{\eta}^\Delta &= (\boldsymbol{\eta}_0^\top, \boldsymbol{\eta}_f^\top) \in \mathbb{R}^{2n_r}. \end{aligned}$$

Die Lagrangeparameter $\boldsymbol{\sigma}_k$ sind in (4.4) bereits durch die Schrittweiten h_k skaliert worden, um die Notation der weiteren Ausführungen zu erleichtern. Dabei wird $h_k = t_{k+1} - t_k$ für $k = 0, \dots, N-1$ sowie $h_N = h_{N-1}$ gesetzt.

Hieraus ergeben sich für die Betrachtung direkter Verfahren zwei Fragestellungen.

- (i) Zum einen stellt sich die Frage nach notwendigen Bedingungen für das diskretisierte Minimierungsproblem (4.3).
- (ii) Desweiteren muß geklärt werden, ob die notwendigen Bedingungen der Aufgabe (4.1) und ihrer diskretisierten Fassung (4.3) konsistent sind, d.h. ob Lösungen $(\mathbf{x}_k^*, \mathbf{u}_k^*)$ der Aufgabe (4.3) für $\max_k h_k \rightarrow 0$ gegen Lösungen $(\mathbf{x}^*(t_k), \mathbf{u}^*(t_k))$ der Optimalsteuerungsaufgabe (4.1) konvergieren.

4.2.1 Endlich-dimensionale nichtlineare Optimierungsaufgaben

Für Lösungen endlich-dimensionaler nichtlinearer Optimierungsaufgaben werden notwendige Bedingungen erster Ordnung erläutert. Betrachtet wird das diskrete nichtlineare Minimierungsproblem

$$(4.5) \quad \begin{aligned} \mathcal{J}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) &\rightarrow \min \\ \text{unter} \quad a_i(\mathbf{y}) = 0 &\quad i = 1, \dots, n_a \\ b_j(\mathbf{y}) \geq 0 &\quad j = 1, \dots, n_b \end{aligned}$$

mit $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $n, n_a, n_b \in \mathbb{N}$ sowie Φ, a_i, b_j reellwertig und differenzierbar.

Definition 4.1 (Lagrangefunktion, Regularitätsbedingung)

Das erweiterte Funktional

$$\mathcal{J}^e(\mathbf{y}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\sigma}) = L(\mathbf{y}, \boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\sigma}) = \Phi(\mathbf{y}) + \sum_{i=1}^{n_a} \kappa_i a_i(\mathbf{y}) + \sum_{j=1}^{n_b} \sigma_j b_j(\mathbf{y})$$

heißt **Lagrangefunktion** der Aufgabe (4.5). Die Nebenbedingungen heißen **regulär**, wenn die Gradienten aller aktiven Bedingungen $a_i(\mathbf{y})$, $i = 1, \dots, n_a$ und $b_j(\mathbf{y})$, $j \in I(\mathbf{y})$ linear unabhängig sind. Dabei ist $I(\mathbf{y}) = \{j \mid b_j(\mathbf{y}) = 0\}$ die Indexmenge der aktiven Beschränkungen.

Damit lassen sich die gesuchten Bedingungen formulieren.

Satz 4.2 (Notwendige Bedingungen erster Ordnung¹) Sei \mathbf{y}^* ein lokales Minimum der Aufgabe (4.5) und es gilt

$$\begin{aligned} a_i(\mathbf{y}^*) &= 0 \quad i = 1, \dots, n_a, \\ b_j(\mathbf{y}^*) &= 0 \quad j \in I(\mathbf{y}^*). \end{aligned}$$

Die Nebenbedingungen seien regulär. Dann existieren Lagrangemultiplikatoren $\boldsymbol{\kappa}^* \in \mathbb{R}^{n_a}$, $\boldsymbol{\sigma}^* \in \mathbb{R}^{n_b}$, so dass folgende Bedingungen gelten

$$(4.6) \quad \left. \frac{\partial L}{\partial \mathbf{y}} \right|_{(\mathbf{y}^*, \boldsymbol{\kappa}^*, \boldsymbol{\sigma}^*)} = \mathbf{0},$$

$$(4.7) \quad \begin{aligned} \kappa_i^* a_i(\mathbf{y}^*) &= 0, \quad i = 1, \dots, n_a, \\ \sigma_j^* b_j(\mathbf{y}^*) &= 0, \quad j = 1, \dots, n_b, \end{aligned}$$

$$(4.8) \quad \sigma_j^* \geq 0, \quad j = 1, \dots, n_b.$$

Beweis: Siehe z.B. [82, 36, 55].

Bemerkung 4.3 Erst die Entwicklung leistungsfähiger Verfahren zur Lösung endlich-dimensionaler nichtlinearer Optimierungsaufgaben hat den direkten Methoden ihre heutige Bedeutung ermöglicht. Praktikable numerische Lösungsverfahren basieren auf **SQP**-Verfahren („sequential quadratic programming“) oder **Gauß-Newton** Methoden.

¹Die in diesem Satz zitierten notwendigen Bedingungen heißen **Karush-Kuhn-Tucker**-Bedingungen.

4.2.2 Direkte Verfahren mit Einschrittverfahren

Satz 4.2 liefert notwendige Bedingungen für Lösungen der Aufgabe (4.3). Anwendung der Bedingung (4.6) auf das erweiterte Funktional (4.4) mit freien Variablen $\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta)$ liefert

$$(4.9-a) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_0} = \boldsymbol{\kappa}_1^\top \left[\mathbf{I} + h_0 \frac{\partial \mathbf{f}^h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)} \right] + \boldsymbol{\eta}_0^\top \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0} + h_0 \boldsymbol{\sigma}_0^\top \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)},$$

$$(4.9-b) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_k} = -\boldsymbol{\kappa}_k^\top + \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top \left[\mathbf{I} + h_k \frac{\partial \mathbf{f}^h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} \right] + h_k \boldsymbol{\sigma}_k^\top \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} \quad k = 1, \dots, N-1,$$

$$(4.9-c) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_N} = -\boldsymbol{\kappa}_N^\top + \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_N} + \boldsymbol{\eta}_f^\top \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_N} + h_N \boldsymbol{\sigma}_N^\top \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N)},$$

sowie

$$(4.9-d) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_k} = h_k \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top \frac{\partial \mathbf{f}^h}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} + h_k \boldsymbol{\sigma}_k^\top \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} \quad k = 0, \dots, N-1.$$

Sind die notwendigen Bedingungen erster Ordnung entsprechend Satz 4.2 erfüllt, lässt sich die diskretisierte Fassung des Minimumprinzips ableiten. Gleichung (4.9-b) liefert

$$(4.10) \quad \boldsymbol{\kappa}_k^\top = \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top - h_k \left[-\boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top \frac{\partial \mathbf{f}^h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} - \boldsymbol{\sigma}_k^\top \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} \right] \quad k = 1, \dots, N-1$$

und entspricht damit einem rückwärtsgerichteten Integrationsverfahren der adjungierten Differentialgleichungen (siehe (2.17) von Abschnitt 2.3). Die Randbedingungen gelten ebenfalls: Der Lagrangevektor $\boldsymbol{\kappa}^\Delta$ werde erweitert, in dem

$$\boldsymbol{\kappa}_0^\top = -\boldsymbol{\eta}_0^\top \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_0}$$

gesetzt wird. Damit behält Gleichung (4.10) ihre Gültigkeit nun auch für $k = 0$. Gleichung (4.9-c) führt direkt auf die Randbedingung

$$(4.11) \quad \boldsymbol{\kappa}_N^\top = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_N} + \boldsymbol{\eta}_f^\top \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_N} + h_N \boldsymbol{\sigma}_N^\top \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N)},$$

(vgl. (2.8) von Abschnitt 2.2). Letztendlich ergibt sich aus (4.9-d)

$$(4.12) \quad +h_k \left[\boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top \frac{\partial \mathbf{f}^h}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} + \boldsymbol{\sigma}_k^\top \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} \right] = 0$$

die diskrete Version des Minimumprinzips. Mit der diskreten Hamiltonfunktion

$$(4.13) \quad H^h(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\kappa}_{k+1}, \mathbf{u}_k) = \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top \mathbf{f}^h(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$$

führen die Optimalitätsbedingungen des endlich-dimensionalen Optimierungsproblems auf

$$\boldsymbol{\kappa}_k^T = \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^T - h_k \boldsymbol{\Lambda}^h(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\kappa}_{k+1}, \mathbf{u}_k) \quad k = 0, \dots, N-1$$

$$\boldsymbol{\kappa}_0^T = -\boldsymbol{\eta}_0^T \left. \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}, \quad \boldsymbol{\kappa}_N^T = \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_N} + \boldsymbol{\eta}_f^T \left. \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_N}$$

für inaktive Ungleichungsnebenbedingungen an den Randpunkten des Intervalls mit

$$\boldsymbol{\Lambda}^h(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\kappa}_{k+1}, \mathbf{u}_k) = - \left. \frac{\partial H^h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\kappa}_{k+1}, \mathbf{u}_k)} - \boldsymbol{\sigma}_k^T \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)}$$

als der Verfahrensfunktion der adjungierten Differentialgleichungen sowie

$$\mathbf{0} = \left. \frac{\partial H^h}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_k, \boldsymbol{\kappa}_{k+1}, \mathbf{u}_k)} + \boldsymbol{\sigma}_k^T \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)}.$$

Die angestrebte Konsistenz für $\max_k h_k \rightarrow 0$ zwischen den notwendigen Bedingungen erster Ordnung von Optimalsteuerungsproblem und endlich-dimensionalen Minimierungsproblem folgt aus der Entwicklung der Verfahrensfunktion $\boldsymbol{\Lambda}^h$.

Resultierendes endlich-dimensionales Minimierungsproblem

Es ergibt sich folgendes nichtlineares endlich-dimensionales Minimierungsproblem

Minimiere mit $\mathbf{y} = (\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^\Delta)$

$$\Phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}_N(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}^\Delta)) \rightarrow \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$\mathbf{r}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{r}_f(\mathbf{x}_N) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) \geq \mathbf{0} \quad \forall k = 0, \dots, N,$$

$$\mathbf{u}_{k,\max} \geq \mathbf{u}_k \geq \mathbf{u}_{k,\min} \quad \forall k = 0, 1, \dots, N.$$

wobei \mathbf{x}_k , $k = 1, \dots, N$ aus der Lösung des numerischen Verfahrens zum Anfangswert \mathbf{x}_0 und Steuerung \mathbf{u}_k , $k = 0, 1, \dots, N$ bestimmt werden

Bemerkung 4.4 Die Diskretisierung der Zustandsdifferentialgleichungen entspricht damit einem *Einfachschießverfahren* (vgl. Abschnitt 4.1). Mit Einführung eines Gitters $\Delta_{\mathbf{x}}$ bzgl. der Zustandsvariablen wird in der Praxis mit entsprechenden Übergangsbedingungen an den Gitterpunkten häufig ein *Mehrfachschießverfahren* hinsichtlich der Zustandsdifferentialgleichungen angewendet (siehe [40]).

Gradienten

Bei der Berechnung des endlichdimensionalen nichtlinearen Minimierungsproblems müssen Gradienten von Funktional, Gleichungs- und Ungleichungsbedingungen zur Verfügung gestellt werden. Aus der Kettenregel ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_N} \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial \mathbf{y}}, \\ \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}_0} \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{y}}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{x}_N} \frac{\partial \mathbf{x}_N}{\partial \mathbf{y}}, \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} &= \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\mathbf{x}_k} \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{y}} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\mathbf{u}_k} \frac{\partial \mathbf{u}_k}{\partial \mathbf{y}}.\end{aligned}$$

womit der größte Aufwand auf die Berechnung der Werte

$$\frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{y}} = \left(\begin{array}{c} \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{x}_0} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{u}_k} \in \mathbb{R}^{n_x \times N} \end{array} \right)$$

fällt. Üblicherweise wird hierfür die Sensitivitätsgleichung

$$\frac{d}{dt} \mathbf{W}(t) = \mathbf{f}_x(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \mathbf{W}(t) + \mathbf{f}_u(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)),$$

(vgl. Bemerkung 1.4(ii)) mit

$$\mathbf{W}(0) = \frac{\partial \mathbf{x}_0}{\partial \mathbf{y}} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x} \\ \mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_x \times N} \end{array} \right), \quad \frac{\partial \mathbf{x}_k}{\partial \mathbf{y}} = \mathbf{W}(t_k) \quad \text{für } k = 1, \dots, N$$

verwendet. Eine alternative Möglichkeit wird in [39] vorgeschlagen. Hier werden die adjungierten Variablen zur Gradientenberechnung verwendet.

4.2.3 Diskretisierungen auf der Basis von Runge-Kutta-Verfahren

Ein Vorteil der direkten Methoden liegt darin, dass lediglich die Zustandsdifferentialgleichungen diskretisiert werden müssen. Es liegt nahe, hierfür die bekannten und weit verbreiteten Runge-Kutta-Verfahren zu verwenden. Diese werden in diesem Zusammenhang ausführlich in [98, 99] besprochen. In [43] findet sich eine Untersuchung der Ansätze, welche die adjungierten Differentialgleichungen berücksichtigt, ohne sie explizit zu berechnen.

Betrachtet werde zunächst Aufgabe (4.1) ohne Ungleichungsnebenbedingungen. Dann ergibt sich für die diskretisierten Zustandsvariablen

$$(4.14) \quad \begin{aligned}\mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h_k \sum_i c_i \mathbf{f}_{ki} \\ \mathbf{x}_{ki} &= \mathbf{x}_k + h_k \sum_j \beta_{ij} \mathbf{f}_{kj}\end{aligned}$$

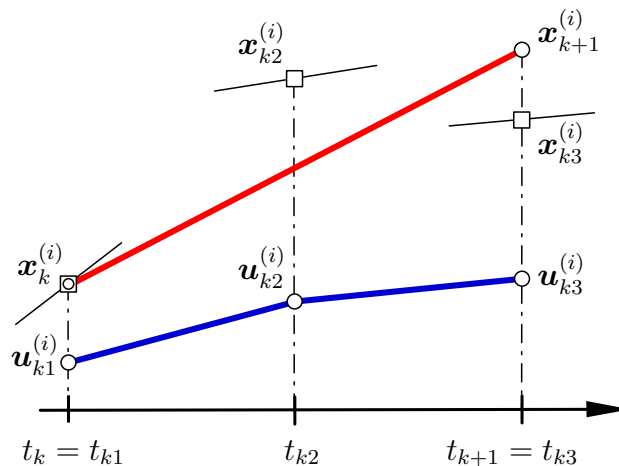


Abbildung 4.2: Diskretisierung eines Runge-Kutta basierten Verfahrens bzgl. der i -ten Komponenten $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)})$ und Stufen $j = 1, 2, 3$ auf dem Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ mit $t_{k1} = t_k, t_{k2} = (t_k + t_{k+1})/2, t_{k3} = t_{k+1}$.

- Schritt $\mathbf{x}_{k+1}^{(i)} = \mathbf{x}_k^{(i)} + h_k \mathbf{f}^{h^{(i)}}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$
- Steuerung an den Punkten t_{kj}
- Stufenableitungen $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x}_{kj}, \mathbf{u}_{kj})$

mit den Runge-Kutta Koeffizienten $c_i, \beta_{ij}, \alpha_i = \sum_j \beta_{ij}$ und den Zwischenstellen $\mathbf{x}_{ki}, \mathbf{u}_{ki}$ an den Stellen $t_k + \alpha_i h_k$. Da es sich um ein s -stufiges Runge-Kutta-Verfahren handelt, gilt für alle Indizes und Summationen $i, j = 1, \dots, s$, sofern nicht anders angegeben. Dabei sollen folgende Abkürzungen gelten

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_k &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k), & \mathbf{f}_{ki} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_{ki}, \mathbf{u}_{ki}), \\ \mathbf{f}_{\mathbf{x}_k} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)}, & \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{ki}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_{ki}, \mathbf{u}_{ki})}, \\ \mathbf{f}_{\mathbf{u}_{ki}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_{ki}, \mathbf{u}_{ki})}, & \Phi_{\mathbf{x}_k} &= \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_k}, \\ \mathbf{r}_{0\mathbf{x}_0} &= \left. \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_0}, & \mathbf{r}_{f\mathbf{x}_N} &= \left. \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}_N}, \end{aligned}$$

an den Stellen $t_k, k = 0, \dots, N$ und Stufen $t_{ki}, k = 0, \dots, N-1, i = 1, \dots, s$. Es ist dann

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\Delta &= (\mathbf{x}_0^\Delta, \dots, \mathbf{x}_{N-1}^\Delta, \mathbf{x}_N^\Delta) & \text{mit } \mathbf{x}_k^\Delta &= (\mathbf{x}_k^\top, \mathbf{x}_{k1}^\top, \dots, \mathbf{x}_{ks}^\top) \quad k = 0, \dots, N-1, \\ \mathbf{u}^\Delta &= (\mathbf{u}_0^\Delta, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^\Delta) & \text{mit } \mathbf{u}_k^\Delta &= (\mathbf{u}_{k1}^\top, \dots, \mathbf{u}_{ks}^\top) \quad k = 0, \dots, N-1. \end{aligned}$$

Damit besteht das Gitter der Zustandsvariablen

$$\Delta_{\mathbf{x}} = \{t_k \mid k = 0, \dots, N\} \cup \{t_{kj} \mid k = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, s\}$$

aus Schritt- und Stufenzeitpunkten des Runge-Kutta-Verfahrens, während das Gitter der Steuerungen

$$\Delta_{\mathbf{u}} = \{t_{kj} \mid k = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, s\}$$

nur an den Stufenzwischenpunkten berechnet wird.

Nun kann das erweiterte Lagrangefunktional gemäß Definition 4.1 aufgestellt werden:

$$(4.15) \quad \begin{aligned} L(\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta, \boldsymbol{\kappa}^\Delta, \boldsymbol{\eta}^\Delta) = & \Phi(\mathbf{y}) + \boldsymbol{\eta}_0^\top \mathbf{r}_0(\mathbf{x}_0) + \boldsymbol{\eta}_f^\top \mathbf{r}_f(\mathbf{x}_N) \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top \left[\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k+1} + h_k \sum_i c_i \mathbf{f}_{ki} \right] \\ & + \sum_{k=0}^{N-1} \sum_i \boldsymbol{\kappa}_{ki}^\top \left[\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{ki} + h_k \sum_j \beta_{ij} \mathbf{f}_{kj} \right]. \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen erster Ordnung ergeben sich aus den Ableitungen nach den freien Variablen $(\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta)$:

$$(4.16-a) \quad \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_k} = \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top - \boldsymbol{\kappa}_k^\top + \sum_i \boldsymbol{\kappa}_{ki}^\top$$

$$(4.16-b) \quad \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_{ki}} = & \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top h_k c_i \mathbf{f}_{x_{ki}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_{ki}} \left(\sum_l \boldsymbol{\kappa}_{kl}^\top \left[\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{kl} + h_k \sum_j \beta_{lj} \mathbf{f}_{x_{kj}} \right] \right) \\ = & \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top h_k c_i \mathbf{f}_{x_{ki}} - \boldsymbol{\kappa}_{ki}^\top + h_k \sum_l \beta_{li} \boldsymbol{\kappa}_{kl}^\top \mathbf{f}_{x_{ki}} \\ = & h_k c_i \left[\boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top + \sum_l \frac{\beta_{li}}{c_i} \boldsymbol{\kappa}_{kl}^\top \right] \mathbf{f}_{x_{ki}} - \boldsymbol{\kappa}_{ki}^\top \end{aligned}$$

$$(4.16-c) \quad \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{u}_{ki}} = & \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top h_k c_i \mathbf{f}_{u_{ki}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{ki}} \left(\sum_l \boldsymbol{\kappa}_{kl}^\top \left[\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{kl} + h_k \sum_j \beta_{lj} \mathbf{f}_{x_{kj}} \right] \right) \\ = & \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top h_k c_i \mathbf{f}_{u_{ki}} + h_k \sum_l \beta_{li} \boldsymbol{\kappa}_{kl}^\top \mathbf{f}_{u_{ki}} \\ = & h_k c_i \left[\boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top + \sum_l \frac{\beta_{li}}{c_i} \boldsymbol{\kappa}_{kl}^\top \right] \mathbf{f}_{u_{ki}} \end{aligned}$$

sowie die Randbedingungen

$$(4.17-d) \quad \begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_0} = & \boldsymbol{\kappa}_1^\top + \sum_i \boldsymbol{\kappa}_{0i}^\top + \boldsymbol{\eta}_0^\top \mathbf{r}_{0x_0} = \left[\boldsymbol{\kappa}_1^\top - \boldsymbol{\kappa}_0^\top + \sum_i \boldsymbol{\kappa}_{0i}^\top \right] + \boldsymbol{\kappa}_0^\top + \boldsymbol{\eta}_0^\top \mathbf{r}_{0x_0}, \\ \frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}_N} = & -\boldsymbol{\kappa}_N^\top + \boldsymbol{\eta}_f^\top \mathbf{r}_{fx_N} + \Phi_{x_N}. \end{aligned}$$

Wird in Gleichung (4.16-b)

$$\boldsymbol{\lambda}_{ki}^\top = \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^\top + \sum_l \frac{\beta_{li}}{c_i} \boldsymbol{\kappa}_{kl}^\top$$

definiert, so folgt als notwendige Bedingung

$$\boldsymbol{\kappa}_{ki}^\top = h_k c_i \boldsymbol{\lambda}_{ki}^\top \mathbf{f}_{x_{ki}}$$

und zusammen mit (4.16-a) ergibt sich das rückwärtsgerichtete Rekursionsschema eines Runge-Kutta-Verfahrens der adjungierten Differentialgleichungen

$$(4.18) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_k^T &= \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^T + h_k \sum_i c_i \boldsymbol{\lambda}_{ki}^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{ki}} \\ \boldsymbol{\lambda}_{ki}^T &= \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^T + h_k \sum_j \frac{c_j}{c_i} \beta_{ji} \boldsymbol{\lambda}_{kj}^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{kj}} \quad \text{für } i = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

bzw. vorwärtgerichtet

$$(4.19) \quad \begin{aligned} \boldsymbol{\kappa}_{k+1}^T &= \boldsymbol{\kappa}_k^T - h_k \sum_i c_i \boldsymbol{\lambda}_{ki}^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{ki}} \\ \boldsymbol{\lambda}_{ki}^T &= \boldsymbol{\kappa}_k^T - h_k \sum_j \bar{\beta}_{ij} \boldsymbol{\lambda}_{kj}^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{kj}} \quad \text{für } i = 1, \dots, s, \\ \text{mit } \bar{\beta}_{ij} &= c_j \left(1 - \frac{\beta_{ji}}{c_i} \right). \end{aligned}$$

Damit ist Konsistenz gegeben, wenn

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\lambda}}^T(t_k + h) &= \boldsymbol{\Lambda}^h(t_k, h) + \mathcal{O}(h^{p+1}) \\ \text{mit } \boldsymbol{\Lambda}^h(t_k, h) &= - \sum_i c_i \boldsymbol{\lambda}_{ki}^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{ki}} \\ \boldsymbol{\lambda}_{ki}^T &= \boldsymbol{\kappa}_k^T - h \sum_j \bar{\beta}_{ij} \boldsymbol{\lambda}_{kj}^T \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{kj}} \end{aligned}$$

erfüllt ist. Die Werte $\boldsymbol{\lambda}_{ki}^T$ sind Stufenapproximationen der adjungierten Variablen $\boldsymbol{\lambda}^T(t)$ an den Stellen

$$\bar{t}_{ki} = t_k + \bar{\alpha}_i h_k \quad \text{mit} \quad \bar{\alpha}_i = \sum_j \bar{\beta}_{ij}.$$

Zusammen mit den Randbedingungen (4.17-d) und den Werten $\mathbf{f}_{\mathbf{x}_{kj}}$ an den Stufenapproximationen der Zustandsvariablen ist Konsistenz gegeben, wenn neben den Konsistenzbedingungen des Runge-Kutta-Verfahrens (4.14) ebenso das assoziierte Runge-Kutta-Verfahren (4.19) der adjungierten Differentialgleichungen Konsistenzordnung mindestens $p \geq 1$ besitzt.

Satz 4.5 *Das Runge-Kutta-Verfahren (4.14) und das assoziierte Runge-Kutta-Verfahren (4.19) besitzen Konsistenzordnung $p = 1, 2, 3, 4$, wenn die Koeffizienten $c_i, \alpha_i, \beta_{ij}$ folgenden Bedingungen setze $d_i = \sum_j c_j \beta_{ji}$ genügen*

$$(4.20-1) \quad \sum_i c_i = 1$$

$$(4.20-2) \quad \sum_i c_i \alpha_i = \frac{1}{2}$$

$$(4.20-3) \quad \begin{cases} \sum_i c_i \alpha_i^2 = \frac{1}{3} \\ \sum_{i,j} c_i (\alpha_j \beta_{ij}) = \frac{1}{6} \end{cases} \quad (4.20-3') \quad \sum_i \frac{d_i^2}{c_i} = \frac{1}{3}$$

$$(4.20-4) \quad \begin{cases} \sum_i c_i \alpha_i^3 = \frac{1}{4} \\ \sum_{i,j} c_i (\alpha_j^2 \beta_{ij}) = \frac{1}{12} \\ \sum_{i,j} c_i \alpha_i (\alpha_j \beta_{ij}) = \frac{1}{8} \\ \sum_{i,j,l} c_i (\beta_{ij} (\alpha_l \beta_{jl})) = \frac{1}{24} \end{cases} \quad (4.20-4') \quad \begin{cases} \sum_i \alpha_i \frac{d_i^2}{c_i} = \frac{1}{12} \\ \sum_i \frac{d_i^3}{c_i^2} = \frac{1}{4} \\ \sum_{i,j} c_i \alpha_i \left(\beta_{ij} \frac{d_j}{c_j} \right) = \frac{5}{24} \\ \sum_{i,j} d_i \left(\beta_{ij} \frac{d_j}{c_j} \right) = \frac{1}{8} \end{cases}$$

Beweis: Siehe [43].

Bemerkung 4.6 Die Bedingungen (4.20-1) bis (4.20-4) des Satzes 4.5 sind genau die Konsistenzbedingungen für Runge-Kutta-Verfahren von Ordnung 1 bis 4. Bis Ordnung 2 sind assoziierte Verfahren gemäß (4.19) stets konsistent, für Ordnung 3 bzw. 4 müssen zusätzlich die Bedingungen (4.20-3') und (4.20-4') erfüllt sein.

Bemerkung 4.7 Entsprechend Bemerkung 4.6 erweist sich das assoziierte Verfahren einer Runge-Kutta-Diskretisierung gemäß (4.19) als konsistent wenigstens mit Ordnung $p = 1$, wenn das Runge-Kutta-Verfahren für die Zustandsdifferentialgleichungen konsistent ist, d.h. (4.20-1) ist erfüllt.

Es bleibt zu überprüfen, inwieweit die Minimierungseigenschaft der gesuchten Steuerungen durch die Näherungen \mathbf{u}_{ki} erfüllt wird. Aus Gleichung (4.16-c) folgt

$$0 = \left[\boldsymbol{\kappa}_{k+1}^T + \sum_l \frac{\beta_{li}}{c_i} \boldsymbol{\kappa}_{kl}^T \right] \mathbf{f}_{\mathbf{u}_{ki}} = \boldsymbol{\lambda}_{ki}^T \mathbf{f}_{\mathbf{u}_{ki}} = \left. \frac{\partial H^h}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_{ki}, \boldsymbol{\kappa}_{k+1}, \mathbf{u}_{ki})},$$

womit das Minimumprinzip auch an den Stufen t_{ki} erfüllt wird.

4.2.4 Diskretisierungen auf der Basis des Kollokationsansatzes

Die Verwendung des Kollokationsansatzes wird von der Idee gestützt, Gleichungsbedingungen für eine implizite Integrationsmethode als Gleichungsnebenbedingungen an das endlich-dimensionale nichtlineare Minimierungsproblem anzukoppeln. Ermöglicht wurde dies durch die Entwicklung leistungsfähiger numerischer Verfahren zur Lösung nichtlinearer endlich-dimensionaler Minimierungsprobleme, die auch für mehrere hundert Variablen und nichtlineare Nebenbedingungen zuverlässige Ergebnisse liefern.

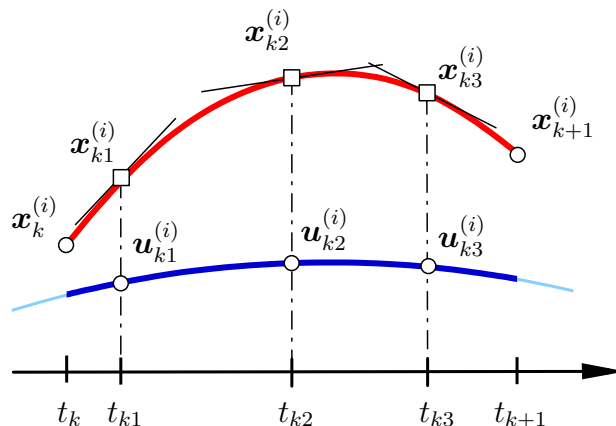


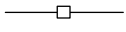


Abbildung 4.3: Diskretisierung eines kollokationsbasierten Verfahrens bzgl. der i -ten Komponenten $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)})$ auf dem Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ mit den Kollokationspunkten t_{k1}, t_{k2}, t_{k3} .

-  Polynom $\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}^{(i)}(t)$ von Grad p_x
-  Polynom $\mathbf{P}_{(\mathbf{u}),k}^{(i)}(t)$ von Grad p_u
-  Ableitungen $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x}_{kj}, \mathbf{u}_{kj})$

Allgemein werden Zustandsvariablen auf einem Gitter

$$\Delta_{\mathbf{x}} = \{t_k \mid k = 0, \dots, N\}$$

betrachtet. Auf den Teilintervallen $[t_k, t_{k+1}]$ werden Zustands- und Steuervariablen durch Polynome $\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}, \mathbf{P}_{(\mathbf{u}),k}$ vom Grad $p_x, p_u \in \mathbb{N}$ approximiert. Gleichungsbedingungen, gegeben durch die Dynamik und das Minimierungsproblem, werden an das diskretisierte Minimierungsproblem angekoppelt. Hierzu zählen allgemein Verheftungsbedingungen

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k-1}(t_k) = \mathbf{x}_k = \mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t_k)$$

an den Gitterpunkten t_k sowie Kollokationsbedingungen

$$\dot{\mathbf{P}}_{(\mathbf{x}),k}(t_{ki}) = \mathbf{f}(\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t_{ki}), \mathbf{P}_{(\mathbf{u}),k}(t_{ki}))$$

an den Kollokationspunkten $t_{ki} = t_k + \alpha_i h_k \in [t_k, t_{k+1}]$. Hinzu kommen die steuerungsabhängigen Ungleichungsnebenbedingungen

$$\mathbf{0} \leq \mathbf{g}(\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t_j), \mathbf{P}_{(\mathbf{u}),k}(t_j)) \quad \forall t_j \in \Delta_{\mathbf{u}}$$

und das Minimierungsfunktional

$$\Phi(\mathbf{x}_N) \rightarrow \min.$$

Zwei wesentliche Punkte sind bei der Wahl der Diskretisierung entscheidend

- (i) Wahl der Polynomordnung $p_x, p_u \in \mathbb{N}$ für Zustand und Steuerung und

(ii) Wahl der Kollokationspunkte $t_{ki} = t_k + \alpha_i h_k$.

Bemerkung 4.8 Die Wahl der Polynomordnung $p_{\mathbf{u}}$ reduziert sich - bedingt durch die Anzahl der gegebenen Freiheitsgrade - auf die Frage, welchem Gitter $\Delta_{\mathbf{u}}$ die Steuerungen zugeordnet werden sollen.

(i) Wird die Steuerung an den Kollokationspunkten des Zustandes, d.h. auf dem Gitter

$$\Delta_{\mathbf{u}} = \{t_{kj} = t_k + \alpha_j h_k \mid k = 1, \dots, N-1, j = 1, \dots, s\}$$

berechnet (Vergleiche Kapitel 4.2.3), ist die Bestimmung der Polynome $\mathbf{P}_{(\mathbf{u}),k}$ unbedeutend, da die Werte \mathbf{u}_{ki} der diskretisierten Steuerungen bereits zur Lösung des Problems genügen und weitere Gitterpunkte nicht sinnvoll sind.

(ii) Oftmals wird die Steuerung jedoch durch Werte \mathbf{u}_k des Gitters

$$\Delta_{\mathbf{u}} = \{t_k \mid k = 0, \dots, N\}$$

an den benötigten Kollokationspunkten konstant oder stetig linear interpoliert (vgl. Abbildungen 4.3 bzw. 4.4). Der Verlust der Genauigkeit wird durch einen Gewinn an Schnelligkeit aufgewogen, da es weniger Freiheitsgrade gibt und damit das endlich-dimensionale nichtlineare Minimierungsproblem weniger Variablen enthält.

Kollokation vom Lobatto-Typ

Im folgende sei eine spezielle Kollokationsmethode genauer beschrieben. Es handelt sich hierbei um eine besonders effektive Methode, die bereits erfolgreich umgesetzt, getestet und zur Berechnung umfangreicher Probleme mit hochdimensionaler Dynamik eingesetzt wird (Programm DIRCOL, siehe [114, 116, 115]). Die geeignete Ausnützung aller numerischen Eigenschaften macht sie zu einer besonders effektiven und robusten Methode (sie sei im Weiteren als DIRCOL-Diskretisierung bezeichnet).

Die Zustandsvariablen werden hierbei stetig differenzierbar durch stückweise kubische Polynome auf einem Gitter Δ approximiert. Die Steuerungen werden dagegen stetig linear auf dem gleichen Gitter gewählt. Für die freien Variablen $(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) = (\mathbf{x}(t_k), \mathbf{u}(t_k))$ auf

$$\Delta = \{t_k \mid k = 0, \dots, N\}$$

ergibt sich

$$(4.22) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t) &= \sum_{i=0}^3 \mathbf{a}_{ki} \tau^i & \text{mit } \tau &= \frac{t - t_k}{h_k} \quad \text{auf } t_k \leq t \leq t_{k+1} \\ \mathbf{P}_{(\mathbf{u}),k}(t) &= (1 - \tau) \mathbf{u}_k + \tau \mathbf{u}_{k+1} \end{aligned}$$

für alle $k = 0, \dots, N-1$. Die Koeffizienten a_{ki} ergeben sich aus den Stetigkeits- und Differenzierbarkeitsbedingungen an den Gitterpunkten. Mit $\mathbf{f}_k = \mathbf{f}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)$ gilt

$$(4.23) \quad \begin{aligned} \mathbf{a}_{k0} &= \mathbf{x}_k, \\ \mathbf{a}_{k1} &= h_k \mathbf{f}_k, \\ \mathbf{a}_{k2} &= -3\mathbf{x}_k + 3\mathbf{x}_{k+1} - 2h_k \mathbf{f}_k - h_k \mathbf{f}_{k+1}, \\ \mathbf{a}_{k3} &= 2\mathbf{x}_k - 2\mathbf{x}_{k+1} + h_k \mathbf{f}_k + h_k \mathbf{f}_{k+1}. \end{aligned}$$

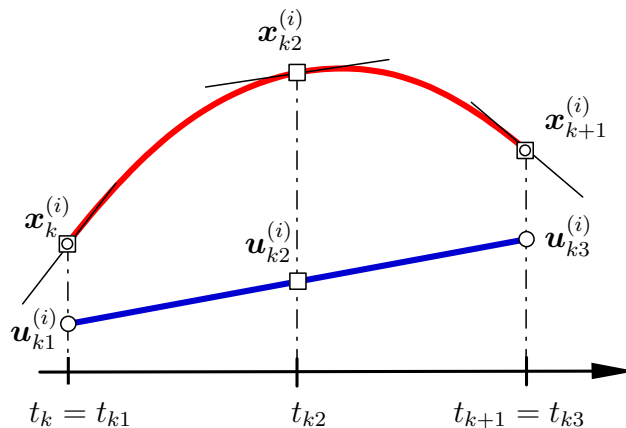


Abbildung 4.4: Diskretisierung eines kollokationsbasierten Verfahrens bzgl. der i -ten Komponente $(\mathbf{x}^{(i)}, \mathbf{u}^{(i)})$ auf dem Intervall $[t_k, t_{k+1}]$ mit $t_{k1} = t_k, t_{k2} = (t_k + t_{k+1})/2, t_{k3} = t_{k+1}$.

- Polynom $\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}^{(i)}(t)$ von Grad $p_{\mathbf{x}} = 3$
- Polynom $\mathbf{P}_{(\mathbf{u}),k}^{(i)}(t)$ von Grad $p_{\mathbf{u}} = 1$
- Ableitungen $\mathbf{f}^{(i)}(\mathbf{x}_{kj}, \mathbf{u}_{kj})$

Es ergibt sich nun mit

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^\Delta &= (\mathbf{x}_0^\top, \dots, \mathbf{x}_N^\top) \\ \mathbf{u}^\Delta &= (\mathbf{u}_0^\top, \dots, \mathbf{u}_N^\top)\end{aligned}$$

ein von Abschnitt 4.2.2 verschiedenes nichtlineares endlich-dimensionales Minimierungsproblem

Minimiere mit $\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta)$

$$\Phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}_N) \rightarrow \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$(4.24) \quad \begin{aligned}\dot{\mathbf{P}}_{(\mathbf{x}),k}(t_{k2}) - \mathbf{f}(\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t_{k2}), \mathbf{P}_{(\mathbf{u}),k}(t_{k2})) &= \mathbf{0} & \forall k = 0, 1, \dots, N-1, \\ \mathbf{r}_0(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_f(\mathbf{x}_N) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k) &\geq \mathbf{0} & \forall k = 1, \dots, N-1, \\ \mathbf{u}_{k,\max} &\geq \mathbf{u}_k \geq \mathbf{u}_{k,\min} & \forall k = 0, 1, \dots, N.\end{aligned}$$

mit $t_{k2} = (t_k + t_{k+1})/2$ für $k = 0, 1, \dots, N-1$.

Bemerkung 4.9 Hierbei wird die Bezeichnung t_{k2} als Kollokationspunkt im Sinne der allgemeinen Kollokationsverfahren gewählt. Entsprechend gilt $t_{k1} = t_k$ und $t_{k3} = t_{k+1}$. Diese

spezielle Wahl der Kollokationspunkte macht das Verfahren besonders effektiv, denn die Berechnung von Kollokationsbedingungen an den äußeren Kollokationspunkten entfällt, da sie implizit durch die Polynomdefinition gegeben sind. Ebenso wird durch die Stetigkeitsbedingung an die Steuerungen und deren Interpolation am mittleren Kollokationspunkt die Anzahl der Steuerungsfreiheitsgrade erheblich reduziert.

In [115] wurden die Konvergenzeigenschaften dieser Diskretisierung erstmals untersucht und Aussagen über deren Konsistenzordnung hinsichtlich der Optimalitätsbedingungen des Optimalsteuerungsproblems (4.1) bewiesen. Sie lassen in folgendem Satz formulieren

Satz 4.10 *Seien die Zustände und Steuerungen der Optimalsteuerungsaufgabe (4.1) diskretisiert durch 3-stufige Kollokation an den Punkten $t_{k1} = t_k$, $t_{k2} = (t_k + t_{k+1})/2$ und $t_{k3} = t_{k+1}$ entsprechend der Gleichungen (4.22, 4.23) und Bedingungen (4.24). Dann ergeben sich aus der erweiterten Lagrangefunktion*

$$(4.25) \quad L(\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta, \boldsymbol{\kappa}^\Delta, \boldsymbol{\sigma}^\Delta) = \Phi(\mathbf{x}_N) + \sum_{k=0}^{N-1} \boldsymbol{\kappa}_k^\top \left[\dot{\mathbf{P}}_{(\mathbf{x},k)}(t_{k2}) - \mathbf{f}(\mathbf{P}_{(\mathbf{x},k)}(t_{k2}), \mathbf{P}_{(\mathbf{u},k)}(t_{k2})) \right] \\ + \sum_{k=1}^{N-1} \boldsymbol{\sigma}_k^\top \mathbf{g}(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k).$$

und

$$(4.26) \quad \boldsymbol{\lambda}(t_{k2}) = -\frac{3}{2h_k} \boldsymbol{\kappa}_k \quad k = 0, \dots, N-1, \\ \boldsymbol{\mu}(t_k) = -\frac{1}{h_k} \boldsymbol{\sigma}_k \quad k = 1, \dots, N-1,$$

die notwendigen Bedingungen erster Ordnung der Optimalsteuerungsaufgabe bis auf Konsistenzordnung $\mathcal{O}(h)$. D.h. für die adjungierten Differentialgleichungen gilt

$$\dot{\boldsymbol{\lambda}}^\top(t_{k2}) = -\boldsymbol{\lambda}^\top(t_{k2}) \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_{k2}, \mathbf{u}_{k2})} - \boldsymbol{\mu}^\top(t_{k2}) \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_{k2}, \mathbf{u}_{k2})} + \mathcal{O}(h)$$

und für die Hamiltonfunktion

$$0 = -\boldsymbol{\lambda}^\top(t_{k2}) \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_{k2}, \mathbf{u}_{k2})} - \boldsymbol{\mu}^\top(t_{k2}) \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_{k2}, \mathbf{u}_{k2})} + \mathcal{O}(h).$$

Beweis: Siehe [115].

Bemerkung 4.11 Die Konsistenz einer Diskretisierung ist notwendig, aber nicht hinreichend für die Konvergenz eines Verfahrens. Aussagen über das Konvergenzverhalten von diskretisierten Optimalsteuerungsproblemen sind bislang nur für die Eulerdiskretisierung bekannt (siehe [75]).

Gradienten

Die Berechnung der Gradienten erweist sich im Vergleich zu den Diskretisierungsverfahren mit expliziten Einschrittverfahren als erheblich weniger aufwendig. Ursache hierfür ist die nun höhere Anzahl an unabhängigen Freiheitsgraden, deren Abhängigkeiten im Abschnitt 4.2.2 berücksichtigt werden mußte. Es ergibt sich

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}_N},$$

sowie

$$\frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}_0}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{y}} = \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{x}_N},$$

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{y}} = \begin{cases} \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}_k} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} \\ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}_k} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} \end{cases} \quad \text{bzw.}$$

Die Gradienten der Bedingung

$$\mathbf{v}(\mathbf{y}) = \dot{\mathbf{P}}_{(\mathbf{x}),k}(t_{k2}) - \mathbf{f}(\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t_{k2}), \mathbf{P}_{(\mathbf{u}),k}(t_{k2}))$$

können ebenfalls direkt berechnet werden. Mit

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t_{k2}) = \frac{1}{2} \mathbf{x}_k + \frac{1}{2} \mathbf{x}_{k+1} + \frac{h_k}{8} \mathbf{f}_k - \frac{h_k}{8} \mathbf{f}_{k+1},$$

$$\mathbf{P}_{(\mathbf{u}),k}(t_{k2}) = \frac{1}{2} \mathbf{u}_k + \frac{1}{2} \mathbf{u}_{k+1},$$

$$\dot{\mathbf{P}}_{(\mathbf{x}),k}(t_{k2}) = -\frac{3}{2h_k} \mathbf{x}_k + \frac{3}{2h_k} \mathbf{x}_{k+1} - \frac{1}{4} \mathbf{f}_k - \frac{1}{4} \mathbf{f}_{k+1}$$

folgt

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}_k} = -\frac{3}{2h_k} - \frac{1}{4} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_{k2}, \mathbf{u}_{k2})} \left(\frac{1}{2} + \frac{h_k}{8} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} \right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{x}_{k+1}} = \frac{3}{2h_k} - \frac{1}{4} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_{k2}, \mathbf{u}_{k2})} \left(\frac{1}{2} - \frac{h_k}{8} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})} \right),$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{u}_k} = -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} - \frac{h_k}{8} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_{k2}, \mathbf{u}_{k2})} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_k, \mathbf{u}_k)} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_{k2}, \mathbf{u}_{k2})},$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{u}_{k+1}} = -\frac{1}{4} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})} + \frac{h_k}{8} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_{k2}, \mathbf{u}_{k2})} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_{k+1}, \mathbf{u}_{k+1})} - \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_{k2}, \mathbf{u}_{k2})}.$$

Die Jacobimatrizen der Gleichungsnebenbedingungen erweisen sich damit als dünn besetzt mit einer ausgeprägten Bandstruktur (siehe auch [115]).

Kapitel 5

Kollokation als implizite Runge-Kutta-Verfahren

Die Theorie der im Sinne von Kapitel 4.2.3 konsistenten Runge-Kutta-Verfahren ist in [43] mit Blick auf explizite Verfahren bzgl. der Zustandsdifferentialgleichungen untersucht und getestet worden. Gleichwohl gelten die in Satz 4.5 angegebenen Bedingungsgleichungen für allgemeine und damit auch für implizite Verfahren.

Der Zusammenhang zwischen Kollokationsverfahren und impliziten Runge-Kutta-Verfahren soll in diesem Abschnitt verwendet werden, um eine verbesserte Schätzung der Adjungierten bei direkten Kollokationsverfahren zu gewinnen. Adjungiertenschätzungen spielen eine Rolle bei der a posteriori Überprüfung der Optimalitätsbedingungen von Optimalsteuerungs- und Sattelpunktproblemen, der Bestimmung des lokalen Optimalitätsfehlers für eine adaptiven Gitterverfeinerung (vgl. z. B. [115]) und der Synthese optimaler Steuerungen (vgl. z. B. [13]).

Betrachtet man Kollokationsverfahren mit Kollokationspunkten $t_k + \alpha_i h_k$, $i = 1, \dots, s$ in jedem Intervall t_k, t_{k+1} , so wird das Verfahren eindeutig durch die Werte $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ bestimmt. Der Zusammenhang zu impliziten Runge-Kutta-Verfahren wird festgestellt durch

Satz 5.1 *Ein durch die Kollokationspunkte $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ eindeutig definiertes Kollokationsverfahren mit den Kollokationsbedingungen*

$$(i) \quad \mathbf{P}(0) = \mathbf{x}(t_k),$$

$$(ii) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{P}(\alpha_i) = \dot{\mathbf{P}}(\alpha_i) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t_k + \alpha_i h_k), \mathbf{u}(t_k + \alpha_i h_k)), \quad i = 1, \dots, s$$

$$(iii) \quad \mathbf{P}(1) = \mathbf{x}(t_{k+1}),$$

für $\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t) = \mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t_k + \tau h_k) = \mathbf{P}(\tau)$ definiert ein äquivalentes implizites Runge-Kutta-Verfahren mit den Koeffizienten

$$\beta_{ij} = \int_0^{\alpha_i} \rho_j(\tau) d\tau, \quad c_i = \int_0^1 \rho_i(\tau) d\tau \quad \text{für } i, j = 1, \dots, s.$$

Die Funktionen $\{\rho_j | j = 1, \dots, s\}$ sind als Lagrange-Basis der Polynome vom Grad $s - 1$ mit

$$\rho_j(\alpha_i) = \begin{cases} 1 & \text{falls } i = j \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

definiert.

Beweis: (siehe z.B. [28]) Mit $\mathbf{f}_{ki}^h = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{ki}, \mathbf{u}_{ki}) = \dot{\mathbf{P}}(\alpha_i)$ ergibt sich

$$\dot{\mathbf{P}}(\tau) = \sum_j \mathbf{f}_{kj}^h \rho_j(\tau),$$

so dass

$$\mathbf{P}(\alpha_i) = \mathbf{x}_k + h_k \int_0^{\alpha_i} \dot{\mathbf{P}}(\tau) d\tau = \mathbf{x}_k + h_k \sum_j \mathbf{f}_{kj}^h \int_0^{\alpha_i} \rho_j(\tau) d\tau = \mathbf{x}_{ki}$$

und

$$\mathbf{P}(1) = \mathbf{x}_k + h_k \int_0^1 \dot{\mathbf{P}}(\tau) d\tau = \mathbf{x}_k + h_k \sum_j \mathbf{f}_{kj}^h \int_0^1 \rho_j(\tau) d\tau = \mathbf{x}_{k+1}$$

und letztendlich

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{k+1} &= \mathbf{x}_k + h_k \sum_i c_i \mathbf{f}_{ki}^h \\ \mathbf{x}_{ki} &= \mathbf{x}_k + h_k \sum_j \beta_{ij} \mathbf{f}_{kj}^h \end{aligned}$$

folgt.

Bemerkung 5.2 Damit erweist sich jedes Kollokationsverfahren als Runge-Kutta-Verfahren. Dagegen wird nicht jedes Runge-Kutta-Verfahren durch ein Kollokationsverfahren erzeugt werden kann. Das zeigen die Beziehungen, denen durch Kollokation erzeugte Koeffizienten eines Runge-Kutta-Verfahrens genügen

$$(5.1) \quad \begin{aligned} \sum_i c_i \alpha_i^{l-1} &= \frac{1}{l} \quad l = 1, \dots, s \\ \sum_j \beta_{ij} \alpha_j^{l-1} &= \frac{\alpha_i^l}{l} \quad i, l = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

Diese ergeben sich mit $\sum_j \alpha_j^{l-1} \rho_j(\tau) = \tau^{l-1}$ wegen

$$\begin{aligned} \sum_i c_i \alpha_i^{l-1} &= \sum_i \alpha_i^{l-1} \int_0^1 \rho_i(\tau) d\tau = \int_0^1 \sum_i \alpha_i^{l-1} \rho_i(\tau) d\tau = \int_0^1 \tau^{l-1} d\tau = \frac{1}{l}, \\ \sum_j \beta_{ij} \alpha_j^{l-1} &= \sum_j \alpha_j^{l-1} \int_0^{\alpha_i} \rho_j(\tau) d\tau = \int_0^{\alpha_i} \sum_j \alpha_j^{l-1} \rho_j(\tau) d\tau = \int_0^{\alpha_i} \tau^{l-1} d\tau = \frac{\alpha_i^l}{l}. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.3 Für s -stufige Kollokationsverfahren mit $s \leq 4$ genügen die Koeffizienten des erzeugten Runge-Kutta-Verfahrens den Ordnungsbedingungen von Satz 4.5 für $p \leq s$. Insbesondere lässt sich durch Umordnung der Summen zeigen, dass Koeffizienten, die den Bedingungen (5.1) genügen, ebenso die Bedingungen (4.20-1, 4.20-2, 4.20-3, usw.) bis zur entsprechenden Ordnung $p = s$ erfüllen. Die Umkehrung ist im Allgemeinen nicht möglich.

Im Folgenden werden ausschließlich 3-stufige Verfahren betrachtet. Daher wird in Aufzählungen und Summen $s = 3$ vorausgesetzt.

Für die spezielle Klasse der 3-stufigen Kollokationsmethoden mit symmetrischen Kollokationspunkten, d. h.

$$(5.2) \quad \alpha_1 = 1 - \alpha_3, \quad \alpha_2 = 1 - \alpha_2 = \frac{1}{2},$$

lassen sich schärfere Ordnungsaussagen ableiten.

Definition 5.4

Kollokationsverfahren mit symmetrischen Kollokationspunkten werden als **symmetrische Kollokationsverfahren** bezeichnet.

Satz 5.5 Jedes 3-stufige symmetrische Kollokationsverfahren erzeugt ein Runge-Kutta-Verfahren mit Konsistenzordnung $p=4$.

Beweis: Konsistenzordnung $p=3$ folgt bereits aus den Bemerkungen 5.2 und 5.3. Gilt

$$(5.3) \quad \sum_i c_i \alpha_i^3 = \frac{1}{4},$$

so lassen sich zusammen mit (5.1) die restlichen Gleichungen (4.20-4) von Satz 4.5 ableiten:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} c_i (\alpha_j^2 \beta_{ij}) &= \sum_i c_i \frac{\alpha_i^3}{3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}, \\ \sum_{i,j} c_i \alpha_i (\alpha_j \beta_{ij}) &= \sum_i c_i \alpha_i \frac{\alpha_i^2}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}, \\ \sum_{i,j,l} c_i (\beta_{ij} (\alpha_l \beta_{jl})) &= \sum_{i,j} c_i \left(\beta_{ij} \frac{\alpha_j^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \sum_i c_i \frac{\alpha_i^3}{3} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{24}. \end{aligned}$$

Zum Nachweis von (5.3) wird analog zu Bemerkung 5.2 folgendes betrachtet:

$$(5.4) \quad \sum_i c_i \alpha_i^3 = \sum_i \alpha_i^3 \int_0^1 \rho_i(\tau) d\tau = \int_0^1 \sum_i \alpha_i^3 \rho_i(\tau) d\tau = \int_0^1 \rho(\tau) d\tau$$

mit

$$\rho(\tau) = \sum_i \alpha_i^3 \rho_i(\tau) = A(\tau - \alpha_2)^2 + B(\tau - \alpha_2) + \alpha_2^3$$

als ein Polynom vom Grad 2 mit den Stützstellen $\rho(\alpha_i) = \alpha_i^3$, $i = 1, 2, 3$ und

$$A = \frac{(\alpha_1^3 - \alpha_2^3) + (\alpha_3^3 - \alpha_2^3)}{2(\alpha_1 - \alpha_2)^2} = \frac{3(\alpha_1 - \alpha_2)^2}{2(\alpha_1 - \alpha_2)^2} = \frac{3}{2}.$$

wegen $\alpha_1 = 1 - \alpha_3$ und $\alpha_2 = 1/2$.

Die Auswertung des Integrals von Gleichung (5.4) liefert

$$\sum_i c_i \alpha_i^3 = \frac{1}{12} A + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}.$$

Die Bemühungen dieses Kapitels zielen auf die zusätzlichen Konsistenzbedingungen (4.20-3', 4.20-4') von Satz 4.5 hinsichtlich der adjungierten Differentialgleichungen ab. Zur Vorbereitung dient das folgende

Lemma 5.6 *Bei einem 3-stufigen symmetrischen Kollokationsverfahren besitzen die Koeffizienten des erzeugten Runge-Kutta-Verfahrens $\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3)$, $\boldsymbol{\beta} = (\beta_{ij})$ $i, j = 1, \dots, 3$ und $d_i = \sum_j c_j \beta_{ji}$, $i = 1, \dots, 3$ folgende Symmetrieeigenschaften*

$$\begin{aligned} (i) \quad & c_i = c_{\bar{i}} \quad i = 1, \dots, 3, \\ (ii) \quad & \beta_{ij} = c_{\bar{j}} - \beta_{\bar{i}\bar{j}} \quad i, j = 1, \dots, 3, \\ (iii) \quad & d_i = c_{\bar{i}} - d_{\bar{i}} \quad i = 1, \dots, 3 \end{aligned}$$

mit Komplementärindex $\bar{i} = s + 1 - i$.

Beweis: Eigenschaft (i) folgt aus den symmetrischen Eigenschaften der definierenden Polynome gemäß Satz 5.1 (vgl. Abbildung 5.1(a))

$$c_i = \int_0^1 \rho_i(\tau) d\tau = \int_0^1 \rho_{\bar{i}}(\tau) d\tau = c_{\bar{i}}.$$

Ebenso ergibt sich (ii)

$$\beta_{ij} = \int_0^{\alpha_i} \rho_j(\tau) d\tau = \int_{\alpha_{\bar{j}}}^1 \rho_{\bar{j}}(\tau) d\tau = \int_0^1 \rho_{\bar{j}}(\tau) d\tau - \int_0^{\alpha_{\bar{j}}} \rho_{\bar{j}}(\tau) d\tau = c_{\bar{j}} - \beta_{\bar{i}\bar{j}}.$$

Daraus folgt (iii) mit

$$d_i = \sum_j c_j \beta_{ji} = \sum_j c_j (c_{\bar{i}} - \beta_{\bar{j}\bar{i}}) = c_{\bar{i}} \sum_j c_j - \sum_j c_j \beta_{\bar{j}\bar{i}} = c_{\bar{i}} \cdot 1 - \sum_{\bar{j}} c_{\bar{j}} \beta_{\bar{j}\bar{i}} = c_{\bar{i}} - d_{\bar{i}}.$$

Lemma 5.7 *Für ein 3-stufiges symmetrisches Kollokationsverfahren genügen die Koeffizienten des gemäß Satz 5.1 erzeugten Runge-Kutta-Verfahrens $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ und $\bar{\boldsymbol{\alpha}} = (\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2, \bar{\alpha}_3)$ des assoziierten Runge-Kutta-Verfahrens der adjungierten Differentialgleichungen entsprechend Abschnitt 4.2.3 der Bedingung*

$$\alpha_i = \bar{\alpha}_i \quad i = 1, \dots, 3.$$

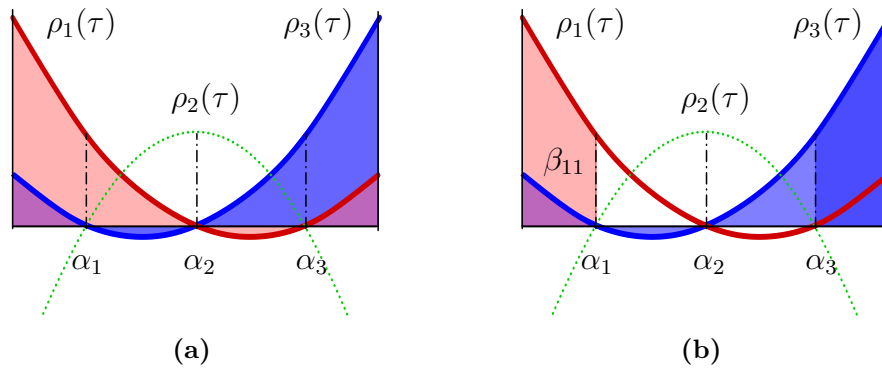


Abbildung 5.1: Symmetrieeigenschaften der Koeffizienten von Lemma 5.6

Beweis: Unter Berücksichtigung der Konsistenzbedingungen an die Koeffizienten c, α, β gemäß Satz 5.5 ergibt sich zusammen mit den Symmetrieeigenschaften von Lemma 5.6

$$\frac{1}{3} = \sum_j c_j \alpha_j^2 = c_1 \alpha_1^2 + (1 - 2c_1) \frac{1}{4} + c_1 (1 - \alpha_1)^2 \Rightarrow c_1 (4\alpha_1(\alpha_1 - 1) + 1) = \frac{1}{6},$$

sowie wegen $c_2 = 1 - (c_1 + c_3) = 1 - 2c_1$

$$\frac{1}{6} = \sum_j \alpha_j d_j = \alpha_1 d_1 + \frac{1}{4}(1 - 2c_1) + (c_1 - d_1)(1 - \alpha_1) \Rightarrow \frac{d_1}{c_1} = \frac{1}{12c_1(1 - 2\alpha_1)} + \frac{1}{2}.$$

Die Koeffizienten $\bar{\alpha}_i$ ergeben sich gemäß (vgl. Abschnitt 4.2.3)

$$\bar{\alpha}_i = \sum_j \bar{\beta}_{ij} = \sum_j c_j \left(1 - \frac{\beta_{ji}}{c_i}\right) = \sum_j c_j - \frac{1}{c_i} \sum_j c_j \beta_{ji} = 1 - \frac{d_i}{c_i},$$

so dass sich mit den oben gefundenen Ausdrücken

$$\bar{\alpha}_1 = 1 - \frac{d_1}{c_1} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{4\alpha_1(\alpha_1 - 1) + 1}{2(1 - 2\alpha_1)} = \alpha_1 \frac{1 - 2\alpha_1}{1 - 2\alpha_1} = \alpha_1$$

ergibt. Die restlichen Koeffizienten sind durch symmetrische Eigenschaften bestimmt, denn es gilt

$$\bar{\alpha}_i = 1 - \frac{d_i}{c_i} = 1 - \frac{c_{\bar{i}} - d_{\bar{i}}}{c_{\bar{i}}} = 1 - \left(1 - \frac{d_{\bar{i}}}{c_{\bar{i}}}\right) = 1 - \bar{\alpha}_{\bar{i}},$$

so dass mit $\bar{\alpha}_2 = 1/2 = \alpha_2$ und $\bar{\alpha}_3 = 1 - \bar{\alpha}_1 = 1 - \alpha_1 = \alpha_3$ die Behauptung bewiesen ist.

Es folgt nun

Satz 5.8 *Koeffizienten von Runge-Kutta-Verfahren, die durch symmetrische 3-stufige Kollokationsverfahren erzeugt werden, erfüllen die erweiterten Konsistenzbedingungen (4.20-3', 4.20-4') des Satzes 4.5, falls $c_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$.*

Beweis: Die Bedingung $c_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, muss erfüllt sein, da andernfalls sowohl die Koeffizienten des assoziierten Verfahrens der adjungierten Differentialgleichungen als auch

die erweiterten Bedingungen (4.20-3', 4.20-4') nicht definiert sind. Es ist zu beachten, dass $c_i < 0$ auf numerische Schwierigkeiten führen kann.

Falls $c_i \neq 0$ lassen sich die erweiterten Bedingungen mit $d_i = c_i(1 - \bar{\alpha}_i) = c_i(1 - \alpha_i)$ (vgl. Beweis von Lemma 5.7) und den Konsistenzbedingungen von Satz 5.5 leicht verifizieren:

Konsistenzordnung 3:

$$\sum_i \frac{d_i^2}{c_i} = \sum_i c_i(1 - \alpha_i)^2 = \sum_i (c_i - 2c_i\alpha_i + c_i\alpha_i^2) = 1 - 2\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3},$$

Konsistenzordnung 4:

$$\sum_i \alpha_i \frac{d_i^2}{c_i} = \sum_i \alpha_i c_i(1 - \alpha_i)^2 = \sum_i (c_i\alpha_i - 2c_i\alpha_i^2 + c_i\alpha_i^3) = \frac{1}{2} - 2\frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{1}{12},$$

$$\sum_i \frac{d_i^3}{c_i^2} = \sum_i c_i(1 - \alpha_i)^3 = \sum_i (c_i - 3c_i\alpha_i + 3c_i\alpha_i^2 - c_i\alpha_i^3) = 1 - 3\frac{1}{2} + 3\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4},$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} c_i\alpha_i \left(\beta_{ij} \frac{d_j}{c_j} \right) &= \sum_i c_i\alpha_i \sum_j \beta_{ij}(1 - \alpha_j) = \sum_i c_i\alpha_i \left(\sum_j \beta_{ij} - \beta_{ij}\alpha_j \right) \\ &= \sum_i \left(c_i\alpha_i^2 - c_i\alpha_i \frac{\alpha_i^2}{2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{24}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} d_i \left(\beta_{ij} \frac{d_j}{c_j} \right) &= \sum_{ij} c_i(1 - \alpha_i)\beta_{ij}(1 - \alpha_j) = \sum_{ij} (c_i\beta_{ij} - c_i\alpha_i\beta_{ij} - c_i\beta_{ij}\alpha_j + c_i\alpha_i\beta_{ij}\alpha_j) \\ &= \sum_i \left(c_i\alpha_i - c_i\alpha_i^2 - c_i \frac{\alpha_i^2}{2} + c_i\alpha_i \frac{\alpha_i^2}{2} \right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}. \end{aligned}$$

Bemerkung 5.9 Damit erweisen sich symmetrische 3-stufige Kollokationsverfahren als konsistent hinsichtlich der adjungierten Differentialgleichungen und des Minimumprinzips, wobei die Konsistenzordnung $p = 4$ beträgt. Es ist allerdings zu beachten, dass es sich beim assoziierten Runge-Kutta-Verfahren hinsichtlich der adjungierten Differentialgleichungen im Allgemeinen **nicht** um ein Kollokationsverfahren handelt. In [43] werden symmetrische Runge-Kutta-Methoden erwähnt, in dem Sinne, dass die Koeffizienten des Runge-Kutta-Verfahrens der Zustandsdifferentialgleichungen denen des assoziierten Verfahrens gleichen. Ein Kollokationsverfahren, welches ein in Sinne von [43] symmetrisches Runge-Kutta-Verfahren erzeugt, besäße dann auch ein assoziiertes Kollokationsverfahren.

5.1 Adjungiertenschätzungen

Betrachtet wird die Kollokationsmethode DIRCOL von Abschnitt 4.2.4. Nach Satz 4.10 liefern die Lagrangeparameter des diskretisierten nichtlinearen Minimierungsproblems eine Schätzung der adjungierten Variablen der Ordnung $\mathcal{O}(h)$. Es soll ein Zusammenhang zu den Ergebnissen des letzten Kapitels hergestellt werden.

Die Koeffizienten $(\mathbf{c}, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ des resultierenden impliziten Runge-Kutta-Verfahrens entsprechen der Tabelle

$$(5.5) \quad \frac{\boldsymbol{\alpha}^T \mid \boldsymbol{\beta}}{\mathbf{c}} \longleftrightarrow \begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{24} \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Damit lassen sich die Koeffizienten des assoziierten Verfahrens der adjungierten Gleichungen $(\mathbf{c}, \bar{\boldsymbol{\alpha}}, \bar{\boldsymbol{\beta}})$ angeben

$$(5.6) \quad \frac{\bar{\boldsymbol{\alpha}}^T \mid \bar{\boldsymbol{\beta}}}{\mathbf{c}} \longleftrightarrow \begin{array}{c|ccc} 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Um für eine gegebene Lösung $(\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta)$ des endlich-dimensionalen Minimierungsproblems von Abschnitt 4.2.4 die Adjungierten zu schätzen, wird $(\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta)$ als eine durch Runge-Kutta-Diskretisierung gewonnene Lösung verwendet. Damit müssen die adjungierten Variablen

$$\boldsymbol{\lambda}_k = \boldsymbol{\kappa}_k + \mathcal{O}(h^p),$$

$k = 0, \dots, N$, und deren Stufenapproximationen $\boldsymbol{\lambda}_{ki}$ für $k = 0, \dots, N-1, i = 1, \dots, 3$ Lösung des vorwärtsgerichteten impliziten Runge-Kutta-Verfahrens (4.19) mit den zugehörigen Randbedingungen sein.

Unter Ausnutzung der Linearität der Gleichungen entspricht jeder Schritt des eigentlichen Integrationsverfahrens der Gleichung

$$(5.7) \quad \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_{k1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k2} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k3} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_k \end{pmatrix} - h_k \begin{pmatrix} \sum_j \bar{\beta}_{1j} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{kj}}^T \boldsymbol{\lambda}_{kj} \\ \sum_j \bar{\beta}_{2j} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{kj}}^T \boldsymbol{\lambda}_{kj} \\ \sum_j \bar{\beta}_{3j} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{kj}}^T \boldsymbol{\lambda}_{kj} \\ \sum_i c_i \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{ki}}^T \boldsymbol{\lambda}_{ki} \end{pmatrix} = \mathbf{A}_k \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}_k \\ \boldsymbol{\lambda}_{k1} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k2} \\ \boldsymbol{\lambda}_{k3} \end{pmatrix}$$

mit

$$(5.8) \quad \mathbf{A}_k = \left(\begin{array}{c|ccc} \mathbf{I} & \bar{\beta}_{11} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k1}}^\top & \bar{\beta}_{12} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k2}}^\top & \bar{\beta}_{13} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k3}}^\top \\ \mathbf{I} & -h_k \begin{bmatrix} \bar{\beta}_{21} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k1}}^\top & \bar{\beta}_{22} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k2}}^\top & \bar{\beta}_{23} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k3}}^\top \end{bmatrix} & & \\ \mathbf{I} & \bar{\beta}_{31} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k1}}^\top & \bar{\beta}_{32} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k2}}^\top & \bar{\beta}_{33} \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k3}}^\top \\ \hline \mathbf{I} & -h_k \begin{bmatrix} c_1 \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k1}}^\top & c_2 \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k2}}^\top & c_3 \mathbf{f}_{\mathbf{x}_{k3}}^\top \end{bmatrix} & & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} \mathbf{I} & \\ \mathbf{I} & -h_k \mathbf{B}_k \\ \mathbf{I} & \\ \hline \mathbf{I} & -h_k \mathbf{C}_k \end{array} \right),$$

wobei die Matrizen \mathbf{A}_k bereits durch die Lösungen $(\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta)$ gegeben sind. Somit führt die Berechnung des Adjungiertenvektors auf ein *lineares Gleichungssystem*

$$(5.9) \quad \left(\begin{array}{c|cc} & & \\ & -\mathbf{I} & \\ \hline & \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ & \mathbf{I} & -\mathbf{I} - h_k \mathbf{B}_k & \mathbf{0} \\ & \mathbf{I} & & \mathbf{0} \\ & \mathbf{I} & -h_k \mathbf{C}_k & -\mathbf{I} \\ & & & \mathbf{I} \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & \mathbf{R}_0 & & \mathbf{R}_N \end{array} \right) \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_k \\ \lambda_{k1} \\ \lambda_{k2} \\ \lambda_{k3} \\ \lambda_{k+1} \\ \vdots \\ \lambda_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{R} \end{pmatrix},$$

mit $(4 \cdot N + 1) \cdot n_x$ Unbekannten.

5.1.1 Die Randbedingungen

Die Matrizen \mathbf{R}_0 , \mathbf{R}_N sowie \mathbf{R} ergeben sich aus den Randbedingungen

$$\begin{aligned} \lambda_0 &= - \left. \frac{\partial \mathbf{r}_0}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_0, \mathbf{u}_0)}^\top \quad \boldsymbol{\nu}_0 = - \mathbf{r}_{0 \mathbf{x}_0}^\top \boldsymbol{\nu}_0, \\ \lambda_N &= \left. \frac{\partial \mathbf{r}_f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_N, \mathbf{u}_N)}^\top \boldsymbol{\nu}_f + \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_N)}^\top = \mathbf{r}_{f \mathbf{x}_N}^\top \boldsymbol{\nu}_f + \Phi_{\mathbf{x}_N}^\top. \end{aligned}$$

entweder durch Elimination der Lagrangeparameter $\boldsymbol{\nu}_0, \boldsymbol{\nu}_f$ oder durch direktes Ankoppeln

der Randbedingungsgleichungen an das lineare Gleichungssystem gemäß

$$\begin{pmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ \mathbf{R}_0 & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{R}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_0 \\ \vdots \\ \lambda_N \\ \nu_0 \\ \nu_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{R} \end{pmatrix}$$

mit

$$\mathbf{R}_0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{r}_{0x_0}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} & -\mathbf{r}_{fx_N}^T \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \Phi_{x_N}^T \end{pmatrix}.$$

Bemerkung 5.10 Es handelt sich bei den diskretisierten Minimierungsproblemen einerseits gewonnen durch Runge-Kutta-Verfahren und andererseits durch Kollokationsmethoden *nicht* um identische Minimierungsprobleme. Lediglich die Diskretisierung der Zustandsdifferentialgleichungen und - falls gegeben - der adjungierten Differentialgleichungen sind äquivalent. Die Verschiedenheit der Minimierungsprobleme resultiert aus den unterschiedlichen Gleichungsbedingungen, die angekoppelt werden und dann zu unterschiedlichen Interpretationen der Lagrangeparameter des endlich-dimensionalen Minimierungsproblems führt.

Zur Anschaulichkeit sei hier die Interpretation der Lagrangeparameter κ_{k2}^{RK} bzw. κ_{k2}^{Kol} angeführt, für die nach Abschnitt 4.2.3, d.h. nach der Runge-Kutta-Methode,

$$-\frac{1}{h_k c_2} \kappa_{k2}^{RK} = -\frac{3}{2h_k} \kappa_{k2}^{RK} = -\mathbf{f}_{x_{k2}}^T \lambda_{k2} = \dot{\lambda}(t_{k2}) + \mathcal{O}(h^p)$$

gilt. Dagegen gilt für die Lagrangeparameter κ_k^{Kol} nach Abschnitt 4.2.4, d.h. nach der Kollokationsmethode DIRCOL

$$-\frac{3}{2h_k} \kappa_k^{Kol} = \lambda(t_{k2}) + \mathcal{O}(h),$$

wobei $t_{k2} = (t_k + t_{k+1})/2$ ist.

5.1.2 Beispiele

Beispiel 5.11 Als Beispiel soll die *Rayleigh-Differentialgleichung* (siehe [39]) betrachtet werden. Sie lautet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1.4 - 0.14x_2^2) + 4u \end{aligned}$$

mit $x_1(0) = x_2(0) = -5$ und dem Funktional

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^{2.5} x_1^2(t) + u^2(t) dt$$

bei fester Endzeit $t_f = 2.5$. Transformation die Form der Aufgabe (4.1) liefert

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2(1.4 - 0.14x_2^2) + 4u \\ \dot{x}_3 &= x_1^2(t) + u^2(t) \end{aligned}$$

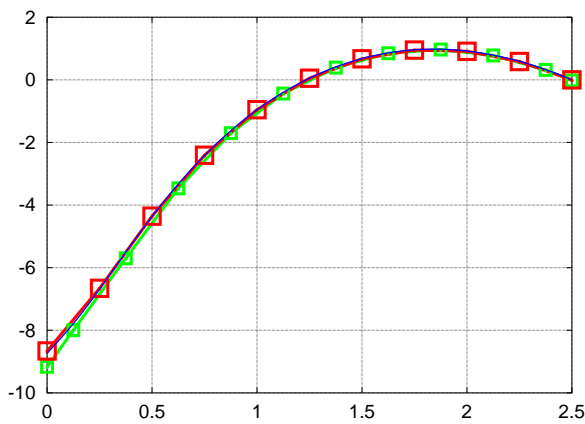
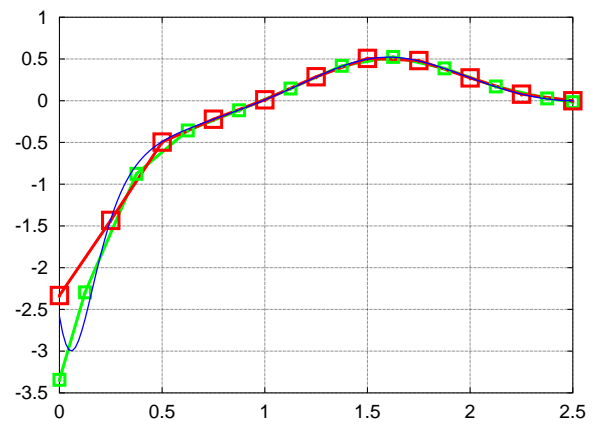
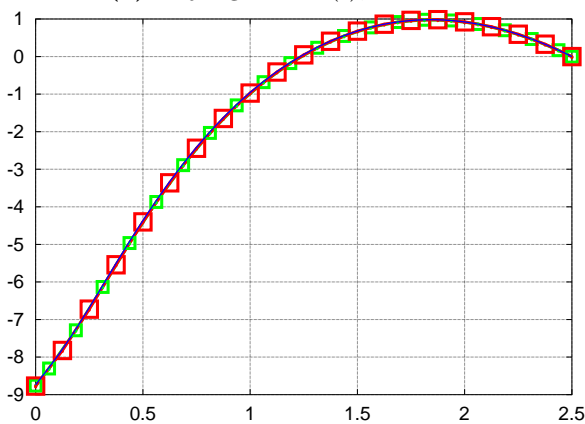
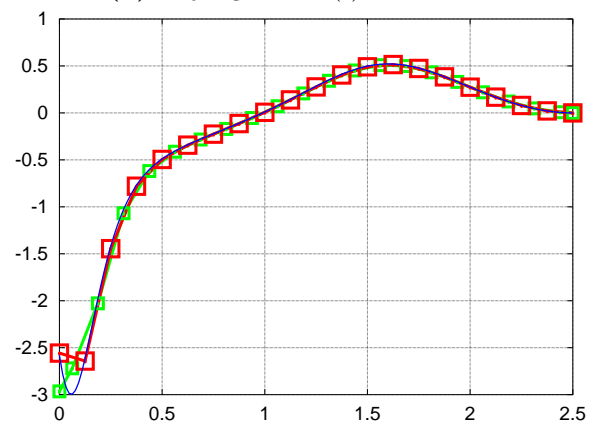
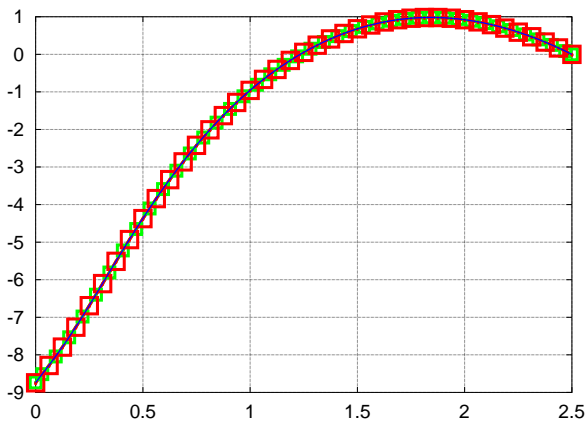
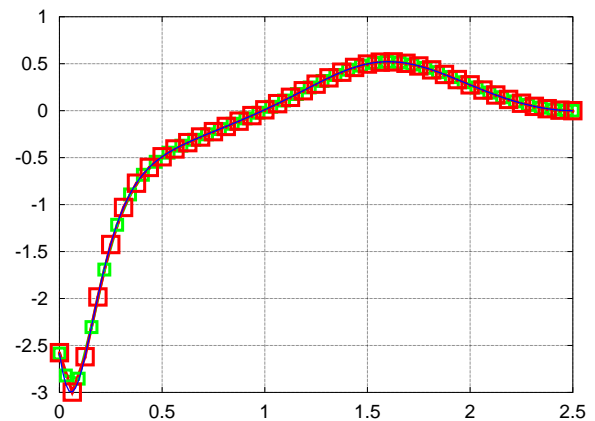
(a) Adjungierte $\lambda_1(t)$, $h = 0.25$ (b) Adjungierte $\lambda_2(t)$, $h = 0.25$ (c) Adjungierte $\lambda_1(t)$, $h = 1.25 \cdot 10^{-1}$ (d) Adjungierte $\lambda_2(t)$, $h = 1.25 \cdot 10^{-1}$ (e) Adjungierte $\lambda_1(t)$, $h = 6.25 \cdot 10^{-2}$ (f) Adjungierte $\lambda_2(t)$, $h = 6.25 \cdot 10^{-2}$

Abbildung 5.2: Lösungen der Adjungierten λ_1, λ_2 von Beispiel 5.11 für verschiedene Schrittweiten $h = 2.5 \cdot 10^{-1}, 1.25 \cdot 10^{-1}, 6.25 \cdot 10^{-2}$, im Vergleich Schätzungen gemäß Satz 4.10 (DIRCOL, kleine Kästchen) und Abschnitt 5.1 (lineares Gleichungssystem (5.9), große Kästchen) sowie eine mit der Mehrzielmethode MUMUS berechnete Referenztrajektorie.

Tabelle 5.1: Vergleich der Schätzwertfehler $\lambda^{Kol}(t_{k2}), \lambda^{RK}(t_k)$ mit Werten einer Referenztrajektorie $\lambda^{Ref}(t)$ für Beispiel 5.11, gemessen in der Euklidischen Norm. Die Tabelle gibt Auskunft über die Fehler zu unterschiedlichen Schrittweiten. Die rechte Spalte enthält die Fehler der Stufenapproximationen $\lambda^{RK}(t_{k2})$ an den Intervallmittelpunkten.

Schrittweite	$\ \lambda^{Kol}(t_{k2}) - \lambda^{Ref}(t_{k2})\ _2$	$\ \lambda^{RK}(t_k) - \lambda^{Ref}(t_k)\ _2$	$\ \lambda^{RK}(t_{k2}) - \lambda^{Ref}(t_{k2})\ _2$
2.5000e-01	1.6742133e+00	2.5953378e-01	1.9469923e+00
1.2500e-01	1.1070889e+00	9.8441100e-02	1.0888356e+00
6.2500e-02	5.3735249e-01	2.6393856e-02	5.3672350e-01
3.1250e-02	2.8344015e-02	1.9111029e-03	1.7426440e-02

mit $x_1(0) = x_2(0) = -5$, $x_3(0) = 0$ und dem Funktional

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) = \Phi(\mathbf{x}(1)) = x_3(1).$$

Ein Vergleich der Fehler in Tabelle 5.1 macht deutlich, dass die durch das Gleichungssystem (5.9) gewonnenen Adjungiertenschätzungen eine deutliche Verbesserung darstellen.

Wiederum wird das Verhältnis zwischen mittlerer Stufenapproximation der Adjungiertenwerte $\lambda^{RK}(t_{k2})$ an den Intervallmittelpunkten und Schätzung aus den Lagrangeparametern $\lambda^{Kol}(t_{k2})$ erkennbar. Beide Schätzungen liefern Fehler von gleicher Größenordnung, während die Approximationen $\lambda^{RK}(t_k)$ an den Stützstellen t_k wesentlich kleinere Fehler besitzen.

In Abbildung 5.2 werden der Verlauf der Adjungierten und die unterschiedlichen Schätzungen sichtbar.

Beispiel 5.12 Betrachtet wird das *Brachistochroneproblem*¹. Ein Massepunkt mit den Koordinaten (x_1, x_2) und Anfangspunkt $(x_{10}, x_{20}) = (9.5, 5.0)$ bewegt sich bei Schwerkraftbeschleunigung $g = 1 \text{ m/s}^2$ auf der Bahn

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \sqrt{x_2} \cos u \\ \dot{x}_2 &= \sqrt{x_2} \sin u.\end{aligned}$$

Gesucht ist die Steuerung $u(t)$, welche das Funktional

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^{t_f} dt = t_f.$$

minimiert, so dass $x_1(t_f) = 0$ ist. Transformation in die Form der Aufgabe (4.1) liefert

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \sqrt{x_2} \cos u \\ \dot{x}_2 &= x_3 \sqrt{x_2} \sin u \\ \dot{x}_3 &= 0\end{aligned}$$

¹Das *Brachistochroneproblem* geht zurück auf *Johann Bernoulli* (1667-1748)

Tabelle 5.2: Vergleich der Schätzwertfehler $\lambda^{Kol}(t_{k2})$, $\lambda^{RK}(t_k)$ mit Werten einer Referenztrajektorie $\lambda^{Ref}(t)$ für Beispiel 5.12, gemessen in der Euklidischen Norm. Die Tabelle gibt Auskunft über die Fehler zu unterschiedlichen Schrittweiten. Die rechte Spalte enthält die Fehler der Stufenapproximationen $\lambda^{RK}(t_{k2})$ an den Intervallmittelpunkten.

Schrittweite	$\ \lambda^{Kol}(t_{k2}) - \lambda^{Ref}(t_{k2})\ _{\max}$	$\ \lambda^{RK}(t_k) - \lambda^{Ref}(t_k)\ _{\max}$	$\ \lambda^{RK}(t_{k2}) - \lambda^{Ref}(t_{k2})\ _{\max}$
1.000e-01	1.4348668e-01	7.3196803e-06	1.4370635e-01
5.000e-02	8.6970053e-02	1.9053696e-06	8.7072334e-02
2.500e-02	4.0992024e-02	4.6744764e-06	4.1039295e-02
1.250e-02	2.4832336e-05	2.6910540e-06	9.4727327e-06

mit $(x_{10}, x_{20}) = (9.5, 5.0)$, $x_2(1) = 0$ auf dem Intervall $[0, 1]$ und

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) = \Phi(\mathbf{x}(t_f)) = x_3(t_f).$$

Der Vergleich der Ergebnisse der Adjungiertenschätzungen bestätigt die erwarteten Beobachtungen, wie sie bereits in Beispiel 5.11 gemacht worden sind. Tabelle 5.2 dokumentiert die Fehlerverhältnisse.

5.1.3 Bemerkungen zur Ordnung des Verfahrens

Die Vergleichsrechnungen der Tabellen 5.1 und 5.2 wurden in Bezug auf die Diskretisierung des Programms DIRCOL (siehe [115] bzw. Abschnitt 4.2.4) durchgeführt. Bei dieser Kollokationsmethode werden die Steuerungen an den Intervallmittelpunkten durch (lineare) Interpolation bestimmt. Diese häufig anzutreffende Vorgehensweise führt zu einer Beschleunigung des Verfahrens, da der numerische Aufwand durch eine geringere Anzahl an freien Variablen für das endlich-dimensionale Minimierungsproblem verringert wird. Dies hat selbstverständlich Auswirkungen auf die Konsistenzordnung des Verfahrens, was durch die verschiedenen Ordnungsaussagen der Sätze 4.5 (Runge-Kutta-Verfahren) und 4.10 (DIRCOL-Diskretisierung) dokumentiert wird. Folglich führt die *Berücksichtigung der Steuerungen an den Intervallmittelpunkten* als freie Variablen wegen der Äquivalenz beider Diskretisierungen gemäß Satz 5.1 zu einer Angleichung der Konsistenzordnung.

In allgemeiner Notation für ein s -stufiges Kollokationsverfahren ergibt sich mit

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^\Delta &= (\mathbf{x}_0^\top, \dots, \mathbf{x}_N^\top), \\ \mathbf{u}^\Delta &= (\mathbf{u}_0^\Delta, \dots, \mathbf{u}_{N-1}^\Delta), \quad \mathbf{u}_k^\Delta = (\mathbf{u}_{k1}^\top, \dots, \mathbf{u}_{ks}^\top), \quad k = 0, \dots, N-1 \end{aligned}$$

ein nichtlineares endlich-dimensionales Minimierungsproblem

Minimiere mit $\mathbf{y} = (\mathbf{x}^\Delta, \mathbf{u}^\Delta)$

$$\Phi(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}_N) \rightarrow \min$$

unter den Nebenbedingungen

$$(5.10) \quad \begin{aligned} \dot{\mathbf{P}}_{(\mathbf{x}),k}(t_{ki}) - \mathbf{f}(\mathbf{P}_{(\mathbf{x}),k}(t_{ki}), \mathbf{u}_{ki}) &= \mathbf{0} & \forall k, i \\ \mathbf{r}_0(\mathbf{x}_0) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{r}_f(\mathbf{x}_N) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{g}(\mathbf{x}_{ki}, \mathbf{u}_{ki}) &\geq \mathbf{0} & \forall k, i \\ \mathbf{u}_{k,\max} &\geq \mathbf{u}_{ki} \geq \mathbf{u}_{k,\min} & \forall k, i \end{aligned}$$

für alle $k = 0, 1, \dots, N - 1, i = 1, \dots, s$ mit $t_{ki} = t_k + \alpha_i(t_{k+1} - t_k)$.

Im Spezialfall der *verallgemeinerten* DIRCOL-Diskretisierung wird die Steuerung an den Stellen $\mathbf{u}_{k1} = \mathbf{u}_k = \mathbf{u}(t_k)$, $\mathbf{u}_{k2} = \mathbf{u}(t_{k2})$ mit $t_{k2} = (t_k + t_{k+1})/2$ sowie $\mathbf{u}_{k3} = \mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}(t_{k+1})$ approximiert. Die Annahme der Stetigkeit liefert $\mathbf{u}_{k3} = \mathbf{u}_{(k+1)1}$. Einerseits führt dies zur Reduktion der Anzahl der Steuerungsfreiheitsgrade, andererseits werden die Kollokationsbedingungen an den Gitterpunkten t_k per Definition erfüllt und müssen daher nur für die Intervallmittelpunkte $t_{k2} = (t_k + t_{k+1})/2$ an das diskretisierte Minimierungsproblem angehängt werden.

Die nach Satz 5.8 gültige theoretische Konsistenzordnung von $p = 4$ wird nun durch das numerische Experiment bestätigt. Eine Implementierung der Kollokationsmethode mit freien Steuerungen an den Intervallmittelpunkten liefert für das Beispiel 5.11 geringere Approximationsfehler für die geschätzten adjungierten Variablen, was nach Kapitel 4.2 als Maß für die Konsistenzordnung hinsichtlich der Optimalitätsbedingungen betrachtet wird. Tabelle 5.3 dokumentiert den Vergleich der verschiedenen Kollokationsverfahren durch Approximationsfehler und deren geschätzte Ordnung am Problem des Beispiels 5.11.

Bemerkung 5.13 Die Frage nach dem geeigneten Verfahren mit entsprechend geeigneter Ordnung lässt sich nur abhängig von der Problemstellung beantworten. D.h. eine höhere Ordnung des Verfahrens trägt in vielen Fällen nicht zur Lösung des Problems bei. Dies gilt insbesondere für praktisch-relevante Fragestellungen mit komplexer - und daher unbekannter-Schaltstruktur.

- (i) An- und Absprungstellen von Ungleichungsnebenbedingungen führen zu Unstetigkeiten in den ersten Ableitungen der Zustandsvariablen, Sprüngen in den Steuerungen oder Unstetigkeiten der ersten Ableitungen - bzw. Sprünge bei reinen Zustandsungleichungsnebenbedingungen - der adjungierten Variablen. Damit sind die Voraussetzungen zur Anwendung der Verfahren verletzt, wenn diese Strukturen der Dynamik nicht im Modell enthalten sind. Die DIRCOL-Diskretisierung hat sich mit seiner Robustheit und angepassten Gitterverfeinerung als ein leistungsfähiges Verfahren erwiesen, mit dem sich auch Schätzungen der Schaltstruktur durchführen lassen.

Tabelle 5.3: Vergleich der Schätzwertfehler $\lambda^{Kol2}(t_{k2}), \lambda^{RK2}(t_k)$ hinsichtlich der *Kollokationsdiskretisierung mit freien Steuerungen an den Intervallmittelpunkten* am Beispiel 5.11, gemessen in der Euklidischen Norm. In der letzten Zeile ist eine Schätzung der Approximationsordnung angegeben, welche die theoretischen Aussagen unterstreichen. Im Vergleich hierzu beträgt die Approximationsordnung der Adjungiertenschätzungen der *Kollokationsdiskretisierung mit interpolierten Steuerungen an den Intervallmittelpunkten* $p \approx 1.0627060$.

Schrittweite	$\ \lambda^{Kol2}(t_{k2}) - \lambda^{Ref}(t_{k2})\ _2$	$\ \lambda^{RK2}(t_k) - \lambda^{Ref}(t_k)\ _2$	$\ \lambda^{RK}(t_{k2}) - \lambda^{Ref}(t_{k2})\ _2$
2.500e-01	2.3049975e+00	5.3244550e-01	2.5953378e-01
1.2500e-01	1.2206563e+00	4.3537352e-02	9.8441100e-02
6.2500e-02	5.6541249e-01	3.4708985e-03	2.6393856e-02
3.1250e-02	1.7131863e-02	2.8885260e-04	1.9111029e-03
$\mathcal{O}(h^p)^\dagger$	$p \approx 1.2229080$	$p \approx 3.6151505$	$p \approx 1.6411209$

- (ii) Eine Erhöhung der Ordnung wie zuvor beschrieben ist nur dann sinnvoll, wenn das Problem die Glattheitsvoraussetzungen erfüllt. Größere Schrittweiten führen dann indirekt zur Verkleinerung der diskretisierten Minimierungsprobleme. Schaltvorgänge in den Ungleichungsnebenbedingungen müssen durch das Gitter erfasst werden. D.h. Sprünge in den Zustandsvariablen müssen durch ein *Mehrphasenproblem* (siehe [115]) in der Modellierungsphase berücksichtigt werden. Eine *verallgemeinerte Steuerungsdiskretisierung* mit verschiedenen links- und rechtsseitigen Steuerungen $\mathbf{u}(t-0) = \mathbf{u}_{(k-1)s}$, $\mathbf{u}(t+0) = \mathbf{u}_{k1}$ an den Gitterpunkten t_k erlaubt auch Sprünge in den Lösungen der optimalen Steuerungen, wenn diese mit einem Gitterpunkt zusammenfallen.

Bemerkung 5.14 Ein Vergleich der direkten Verfahren auf der Basis von explizit gelösten Einschrittverfahren entsprechend Kapitel 4.2.2 bzw. implizit angekoppelter Integrationsverfahren (Kollokationsverfahren) muss problemabhängig behandelt werden:

- (i) Ein wesentlicher Vorteil der expliziten Lösung der Zustandsdifferentialgleichungen ist deren vergleichsweise genaue Lösung. Dies ist besonders dann von Bedeutung, wenn es sich um spezielle Probleme handelt, wie etwa besonders steife Differentialgleichungen oder differentialalgebraische Gleichungen.
- (ii) Die Verlagerung der Lösung der Differentialgleichungen bei implizit angekoppelten Kollokationsverfahren auf das diskretisierte Minimierungsproblem vergrößert einerseits das Problem, erleichtert dagegen die Bestimmung der Gradienten wesentlich, welche

[†]Die Schätzung der Ordnung p erfolgt durch Approximation der Funktion $c \cdot h^p$, wobei die Quadratsumme der Abweichungen zu den ermittelten Fehlerwerten minimiert wird.

nun direkt bestimmbar sind und nicht durch zusätzliche numerische Verfahren berechnet werden müssen. Insbesondere die *Ausnützung der dünnbesetzten bandorientierten Struktur* der Jacobimatrizen beschleunigt diese Verfahren wesentlich.

Kapitel 6

Implementierung zur Berechnung numerischer Lösungen von Optimalsteuerungsaufgaben

Im Rahmen der Arbeit ist eine objektorientierte Implementierung eines Programms zur Lösung von diskretisierten Optimalsteuerungsaufgaben entstanden. Wesentliche Punkte hierbei sind:

- (i) Eine C++ Schnittstelle für das Fortran-Programm SNOPT (siehe [37]) zur Berechnung endlich-dimensionaler nichtlinearer beschränkter Minimierungsprobleme gemäß Abschnitt 4.2.1.
- (ii) Eine allgemeine objektorientierte Klassenstruktur zur Lösung diskretisierter Optimalsteuerungsprobleme für einphasige Probleme.
- (iii) Umsetzung von Klassen für konkrete Diskretisierungen auf der Basis von Kollokationsverfahren gemäß Kapitel 4.2.4 bzw. 5.1.3.

Die Berechnung der im Nachbearbeitungsprozess vorgenommenen Adjungiertenschätzungen gemäß Abschnitt 5.1 sind zunächst durch ein MATLAB-Skript realisiert worden.

6.1 Direkte Diskretisierungsverfahren

Bei der objektorientierten Implementierung¹ zur Lösung von einphasigen diskretisierten Optimalsteuerungsaufgaben stand insbesondere die Austauschbarkeit der in der vertikalen Klassenstruktur auftretenden verschiedenen numerischen Verfahren im Blickpunkt.

- (i) Die Klasse **snopt** steht für eine Schnittstelle zum SQP-Verfahren SNOPT (siehe [37]) zur Lösung eines endlich-dimensionalen nichtlinearen beschränkten Minimierungsproblems.

¹Initialisierungsdateien der Schnittstelle zur SQP-Methode **snopt++.h**, Diskretisierungsklasse **col++.h** sowie für eine allgemeine Problemklasse **problem++.h** mit Beispielprogramm **main.cc** befinden sich auf Seite 136, Abschnitt A.1.

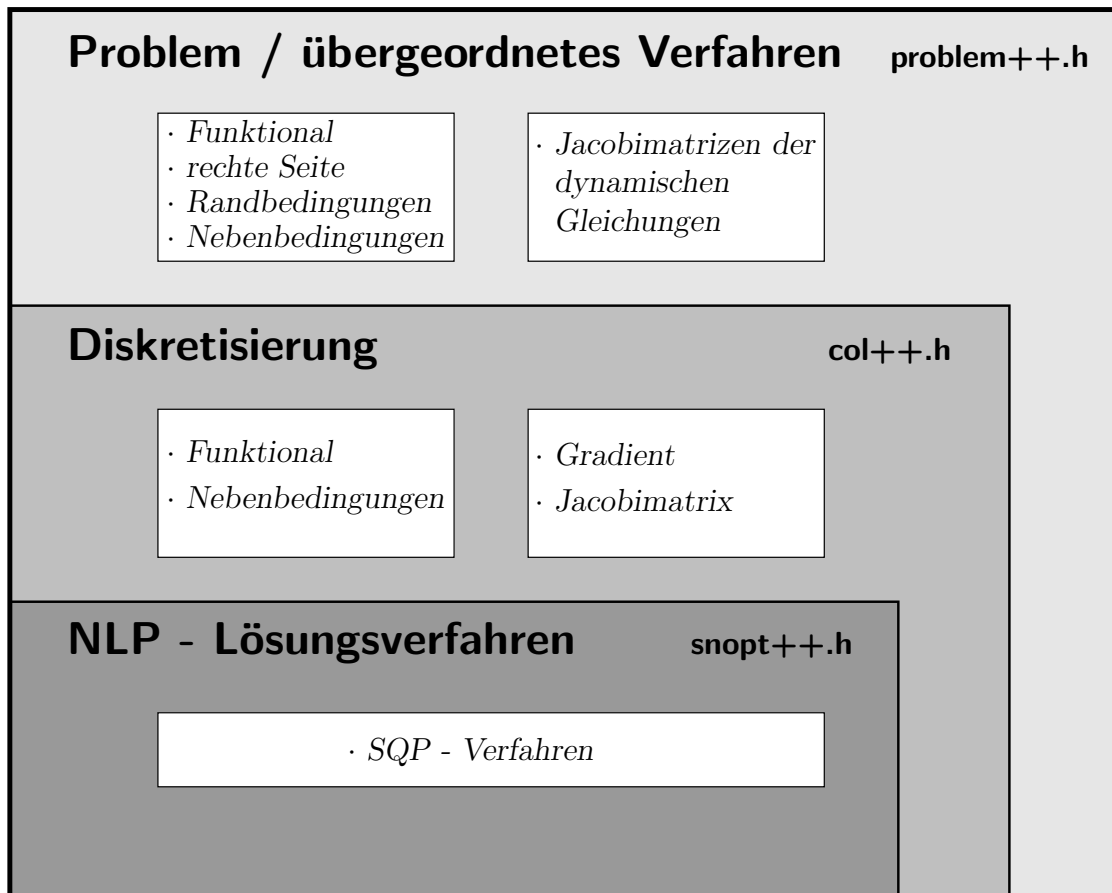


Abbildung 6.1: Schematische Klassenstruktur einer objektorientierten Implementierung. Die SNOPT-Schnittstelle `snopt++.h` vererbt die zur Minimierung wesentlichen Methoden an die realisierte Klasse der Diskretisierung `col++.h`, welche ihrerseits das transformierte Minimierungsmethoden an die Problemklasse `problem++.h` vererbt. Die Diskretisierung ist gemäß einer Schnittstellendefinition leicht austauschbar.

- (ii) Mit der Diskretisierung `col` wird die numerische Verknüpfung zwischen den dynamischen Gleichungen der Problemklasse sowie den Funktionalen und Nebenbedingungen für das diskretisierte Minimierungsproblem hergestellt.
- (iii) Die Klasse `problem` des behandelten dynamischen Systems enthält die dynamischen Gleichungen, falls vorhanden deren Ableitungen und kann auf die Minimierungsfunktionen zugreifen.

In den Abbildungen 6.1 und 6.2 sind Vererbungsstruktur und Flußdiagramm des Programmablaufs dargestellt. Der Benutzer muss Problemparameter initialisieren, die Gleichungen der Dynamik und falls möglich deren Ableitungen angeben sowie problemspezifische Ausgabeformate definieren.

Die objektorientierte Struktur erlaubt eine besondere Programmierung der Gradienten und Jacobimatrizen von diskretisierten Funktionalen. Implementiert als *virtuelle Funktionen* der

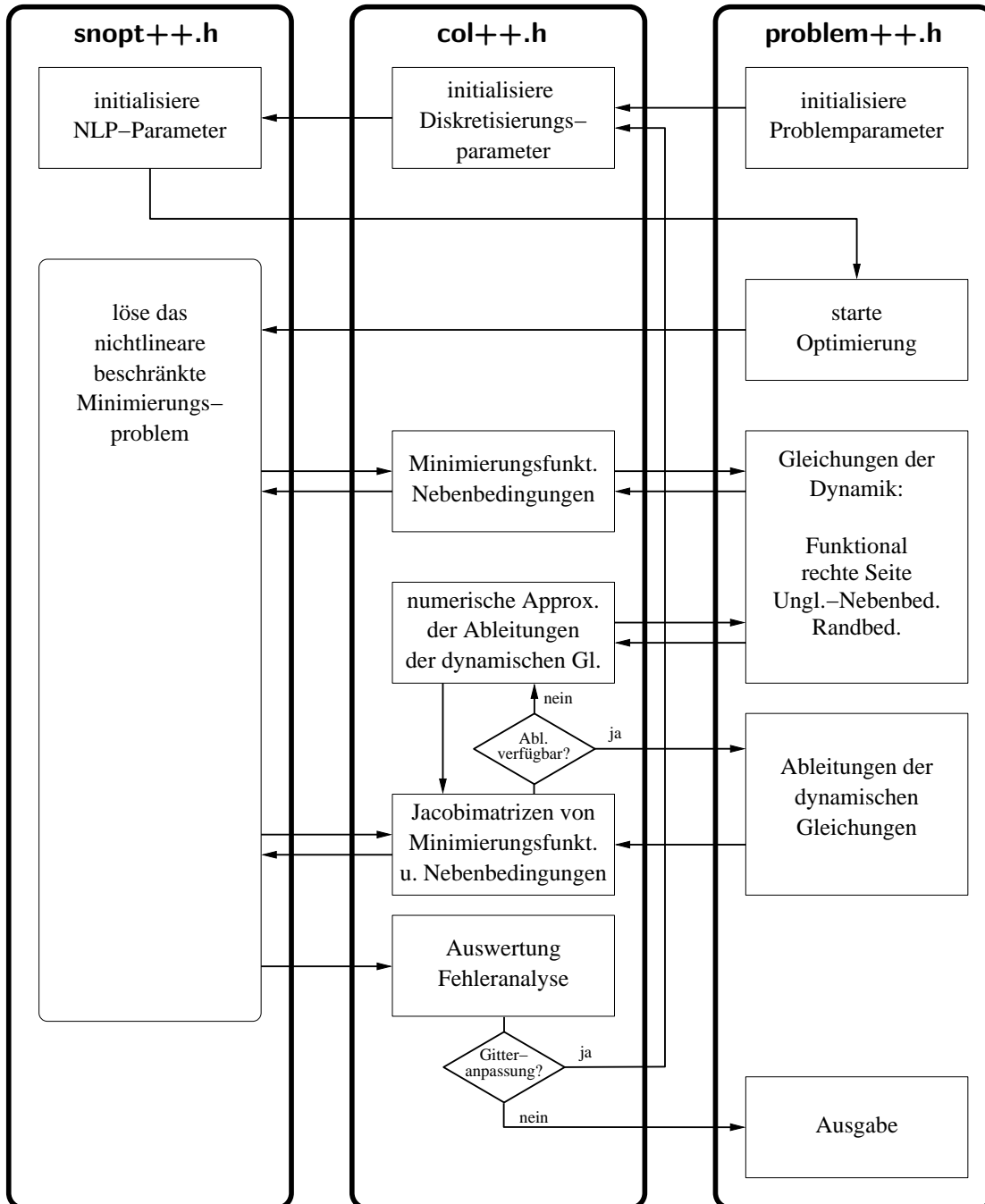


Abbildung 6.2: Flussdiagramm des direkten Optimierungsverfahrens. Die wesentlichen Methoden der SNOPT-Schnittstelle stehen dem Benutzer bzw. dem Programmierer der Diskretisierung zur Verfügung. Der Benutzer muss die dynamischen Gleichungen und möglichst deren Ableitungen zur Verfügung stellen. Die Gitterverfeinerung, orientiert am lokalen Optimalitäts- und Diskretisierungsfehler einer berechneten Lösung (siehe[115, 116]), wirkt als übergeordnete Iteration.

benutzenden Klasse können sie als allgemeine numerische Approximation, etwa auf der Basis von Differenzenquotienten, programmiert werden. Kann der Benutzer der Problemklasse oder der Programmierer der Diskretisierung die Ableitungen exakt bzw. durch bessere numerische Verfahren zur Verfügung stellen, so wird darauf zurückgegriffen.

Bemerkung 6.1

- (i) In dieser Gestalt kann das Problem selbst ohne großen Aufwand als Teil eines übergeordneten Verfahrens behandelt werden.
- (ii) Bei der hier vorgeschlagenen objektorientierten Programmstruktur steht ein klar strukturierter Aufbau der einzelnen Funktionen und Methoden im Vordergrund, welcher den Austausch der Problemklassen mit ihren dynamischen Gleichungen bzw. den Austausch der numerischen Diskretisierungsverfahren erleichtert.
- (iii) Der Klassenaufbau erlaubt auch Diskretisierungen auf der Basis direkter Schießverfahren. Die Funktionsauswertungen von Funktional und Nebenbedingungen der Diskretisierungsklasse verwendet entsprechend angepasste numerische Integrationsverfahren. Zur Berechnung der Jacobimatrizen müssen entsprechende Verfahren zur Sensitivitätsanalyse bereitgestellt werden.

6.2 Adjungiertenschätzung

Die nachträgliche Schätzung der Adjungierten eines (einphasigen) Optimalsteuerungsproblems erfolgt mit Hilfe eines MATLAB-Skriptes².

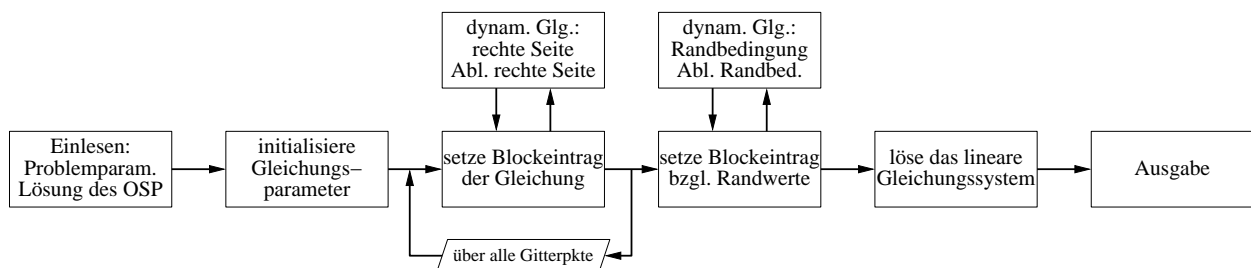


Abbildung 6.3: Folge der Anweisungen zur Berechnung einer Adjungiertenschätzung aus der Lösung eines Optimalsteuerungsproblems.

Hierfür werden die Ausgabedateien der Auswertungsfunktionen des jeweils verwendeten Programms zur Berechnung des Optimalsteuerungsproblems eingelesen. Aus einer berechneten optimalen Zustands- und Steuertrajektorie an den Gitter- und Zwischenstufenpunkten kann

²Das MATLAB-Skript `loeseGLS.m` zur Initialisierung und Berechnung des linearen Gleichungssystems (5.9) befindet sich auf Seite 136, Abschnitt A.1.

nun die Systemmatrix \mathbf{A}_k von Gleichung (5.8) bestimmt werden. Hierfür wird auf die Ableitungen der rechten Seite bzw. Randwertbedingungen zugegriffen. Falls diese nicht zur Verfügung stehen, müssen an dieser Stelle numerische Methoden verwendet werden.

Teil III

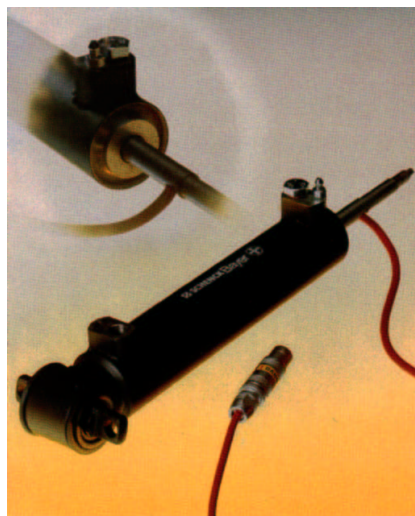
Optimale semi-aktive Schwingungsdämpfung mit elektrorheologischen Flüssigkeiten

Kapitel 7

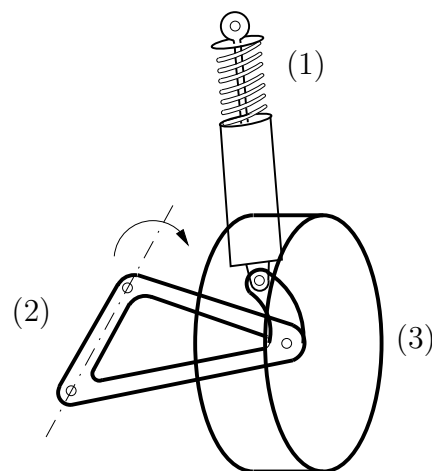
Optimale semi-aktive Schwingungsdämpfung

Im folgenden Kapitel wird die Berechnung von Steuerungen für Schwingungsdämpfer mit elektrorheologischen Fluiden (ERF) behandelt. Beim Eingriff in das Schwingungsverhalten einer Radaufhängung durch ERF-Dämpfer spricht man von *semi-aktiver* Schwingungsdämpfung, denn es handelt sich um die Regelung der Dämpfung, d.h. der absorbierenden Eigenschaften des Dämpfungssystems. Es wird keine zusätzliche Energie in das Mehrkörpersystem des Fahrzeugs zugeführt, wie etwa bei einem Aktuator.

Die Dämpfungseigenschaften von ERF-Schwingungsdämpfern sind kontinuierlich regelbar, abhängig von einem im Ventil des Dämpfers erzeugten elektrischen Feld. Die Breite des nutz-



(a)



(b)

Abbildung 7.1: ERF-Schwingungsdämpfer (a) und Darstellung einer Radaufhängung (b) mit Feder-Dämpfer-Element (1), Querlenker (2) und Rad (3).

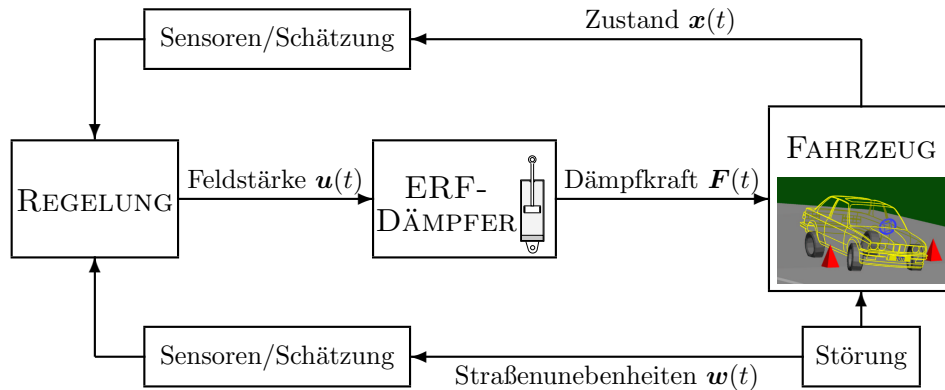


Abbildung 7.2: Konzeptionelle Modellstruktur der semi-aktiven Schwingungsdämpfung.

baren Spektrums an Kennlinien ist sehr groß und die Reaktionszeiten der Schwingungsdämpfer liegt im Bereich von Millisekunden. Daher kann die Dämpfkraft im Sinne von

- (i) **Fahrsicherheit** durch besseren Kontakt zur Straße bzw.
- (ii) **Komfort**, gemessen an Kräfteinwirkungen auf den Fahrzeugaufbau,

gesteuert werden kann.

Die Aufgabenschwerpunkte bei der semi-aktiven Schwingungsdämpfung ergeben sich entsprechend der Übersicht von Abbildung 7.2: Basierend auf dynamischen **ERF-Dämpfermodellen** sind **optimierte semi-aktive Dämpfungssteuerungen** für Fahrzeugschwingungsdämpfer zu entwickeln. Dabei werden verschiedene **dynamische Teil- bzw. Gesamtfahrzeugmodelle** betrachtet (siehe [91, 117, 35, 95, 21, 94, 51]). Zur Erstellung eines echtzeitfähigen realisierbaren Regelalgorithmus werden linearisierte Teilfahrzeugmodelle optimiert und gestützt durch einen Beobachter in der Gesamtfahrdynamiksimulation VEDYNA verifiziert. Es treten weitere Fragestellungen auf:

- (i) Behandlung der **Gütefunktionale** und
- (ii) Berücksichtigung **unvorhersehbarer Störungen**.

Die Behandlung der Fragestellungen für den allgemeinen nichtlinearen Fall motiviert die Untersuchungen der Teile I und II dieser Arbeit.

7.1 Elektrorheologische Fluide

7.1.1 Wirkungsweise elektrorheologischer Fluide

Elektrorheologische Fluide sind Flüssigkeiten, deren viskose Eigenschaften innerhalb von Millisekunden durch Anlegen eines elektrischen Feldes geändert werden können. In Abhängigkeit

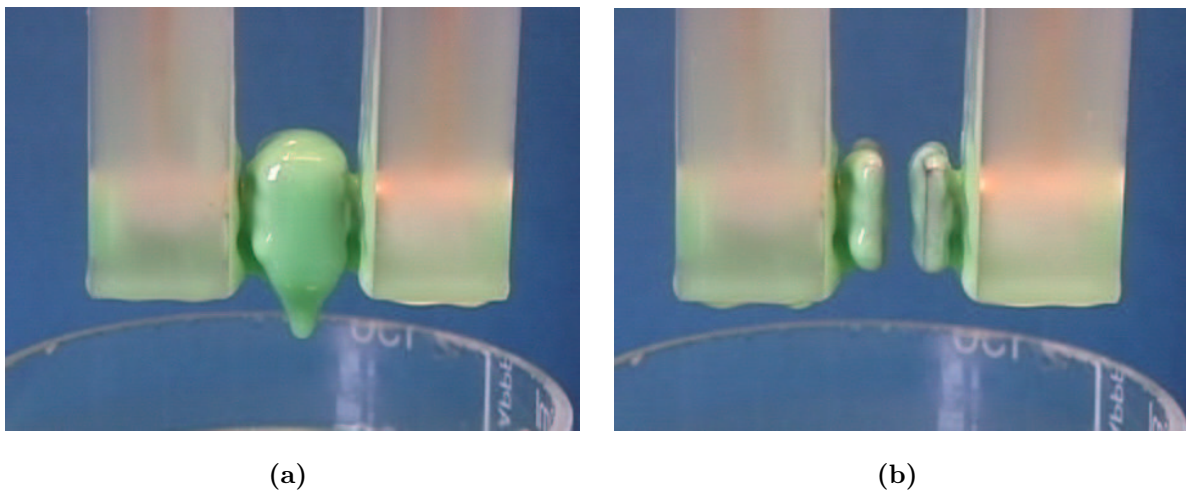


Abbildung 7.3: Experiment zur Demonstration des Verhaltens eines elektrorheologischen Fluids zwischen zwei Elektroden bei angelegtem (a) und ohne elektrisches Feld (b).

(Versuchsaufbau: Fraunhofer-Institut für Silicatforschung ISC, Würzburg.)

von der angelegten Feldstärke kann das Fließverhalten zwischen dem eines herkömmlich-flüssigen Fluids (*Newtonsches Fluid*) und einem nahezu festen Zustand variieren (*Bingham-sches Fluid*). Dieser Prozess ist reversibel und beliebig oft wiederholbar. Als Schnittstellen zwischen **elektronischen Steuereinheiten** und **mechanischen Bauteilen** bieten die ERF innovative Anwendungsmöglichkeiten¹, denn die Vorteile der ERF-Bauteile sind gekennzeichnet durch *kontinuierliche Regelbarkeit*, *schnelles* sowie *verschleißarmes Verhalten* (siehe[22]).

Das Prinzip der ERF beruht auf der Bildung von Molekülketten elektrisch erregbarer Partikel innerhalb einer Trägerflüssigkeit. Unter dem Einfluss eines steigenden elektrischen Feldes wächst die Festigkeit der Molekülketten, die sich in Feldrichtung bilden, und damit auch die Scherkräfte senkrecht zur Feldrichtung. Das funktionale, stark nichtlineare dynamische Zusammenspiel zwischen Feldstärke und Scherkräften beherrscht das charakteristische Verhalten des Schwingungsdämpfers, dessen Kennlinien von der Viskosität des Fluids abhängen, da dieses bei Anregung des Dämpferkolbens durch das Ventil fließt (vgl. Abbildung 7.4).

Entsprechend des hohen Scherkraftspektrums, das durch ein veränderliches elektrisches Feld erzeugt wird, ergibt sich ein breites Kennlinienfeld der kontinuierlich regelbaren ERF-Schwingungsdämpfer.

¹Mit einer neuen Generation von ERF gelten frühere Schwierigkeiten wie Langzeitstabilität und Sedimentation in hydraulischen Systemen inzwischen als weitgehend gelöst (siehe z. B. [1]).

Mehrere, neuartige *rheo-elektrische* bzw. *rheo-magnetische Systeme* sind in der Vergangenheit entwickelt worden: Prototypen eines adaptiv regelbaren ERF-Stoßdämpfers von der Schenck Pegasus GmbH, Darmstadt (s. [2]), entsprechende Entwicklungen auch in [44, 87, 71, 73, 72]; weitere fahrzeugtechnische Anwendungen wie Kupplungen oder Motoraufhängungen (s. [44, 66, 119]); ein rheo-elektrischer Servoantrieb RheAct (s. [3]); Fahrersitzschwingungsdämpfung in Lastkraftwagen (s. [59, 25]); seismischer Schutz von Gebäuden (s. [103]). Weitere Anwendungen sind in [22] zitiert.

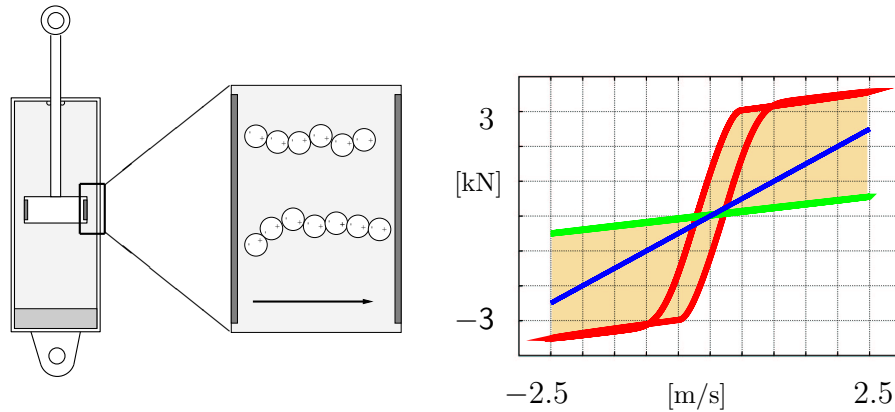


Abbildung 7.4: Einfluss der Viskosität der ER-Flüssigkeit auf das Kennlinienverhalten des Dämpfers im Mehrkörpersystem. Links ein schematischer Dämpfer mit vergrößertem Ventil. Rechts das resultierende Kennlinienspektrum im Vergleich zur linearen Dämpfung.

7.1.2 Modellierung der Dynamik von ERF-Schwingungsdämpfern

Zur Darstellung der *rheologischen Eigenschaften* wird für ERF ein viskoplastisches Bingham-Modell der Art

$$\tau = \tau_0(E) \operatorname{sign} \dot{\sigma} + \eta_p \dot{\sigma}$$

verwendet, wobei E die Feldstärke, $\tau_0(E)$ die feldabhängige Grenzscherspannung, η_p die konstante plastische Viskosität und $\dot{\sigma}$ die Scherrate ist. Die Grenzscherspannung muss zunächst überwunden werden, bevor das Fluid tatsächlich fließt. Deren Abhängigkeit vom anliegenden Feld $\tau_0 \sim E^{n_\tau}$, wird zumeist als quadratisch, d.h. $n_\tau = 2$, angenommen, wobei experimentell jedoch Abhängigkeiten im Bereich von Potenzen $1.2 \leq n_\tau \leq 2.5$ für unterschiedlich zusammengesetzte Flüssigkeiten beobachtet wurden (siehe [33, 34]).

Bei den Anwendungen von ERF werden drei elementare Arbeitsmodi unterschieden: Ventilmodus, direkter Schermodus, Quetschmodus (siehe [102]). Jedoch treten häufig Mischformen der drei Modi auf.

Die mathematische Modellbildung und numerische Simulation des *ERF-Fließverhaltens* mit Kontinuumsmodellen ist Gegenstand aktueller Forschung (siehe z.B. [51])². Da die Rechenzeit bei der numerischen Simulation der Kontinuumsmodelle sehr hoch ist, werden vereinfachte Modelle zur Simulation des dynamischen Dämpfungsverhaltens innerhalb von Fahrzeugmodellen verwendet.

² Auf Seiten der Modellierung von Kontinuumsmodellen stehen grundsätzlich noch viele Fragen offen, z. B. zeitveränderliche, instationäre Modellierungen und Simulationen, die Abhängigkeit der Grenzscherspannung von der Feldstärke, die in Experimenten beobachteten Effekte der Kompressibilität und Kavitation sowie die Abhängigkeit eines ERF-Gesetzes von Temperatur und Volumenstrom.

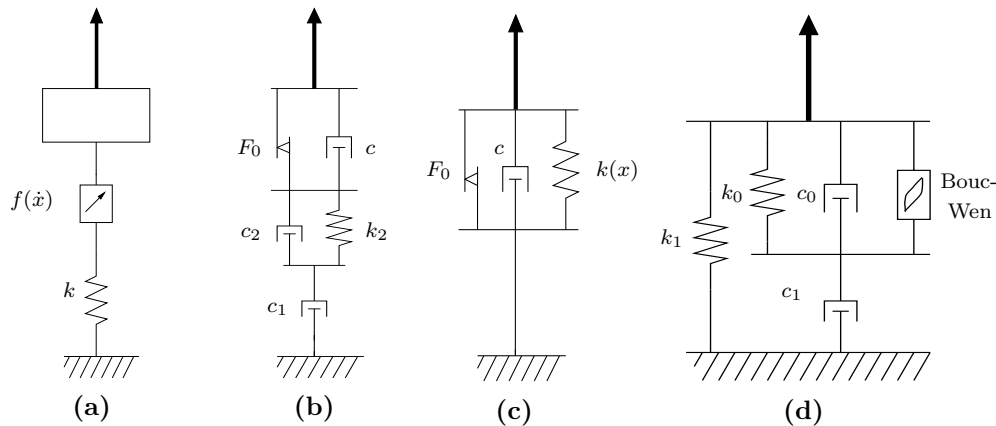


Abbildung 7.5: Phänomenologische Kompaktmodelle des dynamischen viskoelastisch-plastischen ERF-Systemverhaltens: (a) Peel, Stanway, Bullough [105]; (b) Powell [92]; (c) Ehrgott, Masri bzw. [31] bzw. Kamath, Wereley [31]; (d) Spencer et. al. [104].

Zu diesem Zweck wurden funktionale Approximationen des Systemverhaltens durch Summen orthogonaler Čebyšev-Polynome (s. z. B. [31, 60]) oder durch mehrlagige neuronale Netze (s. z. B. [74, 73]) vorgeschlagen. Wegen der vielen zu bestimmenden Approximationsparameter sowie der schlechten Zuverlässigkeit bei der Vorhersage des globalen Systemverhaltens haben sich diese Modelle nicht durchsetzen können.

Parametrisierte, phänomenologische Kompaktmodelle sind zunächst zur Modellierung des passiven Systemverhaltens untersucht und eingesetzt worden. Nur wenige Modelle sind bisher zur Berücksichtigung veränderlicher Feldstärken entwickelt worden. Ein Überblick ist in [51, 22] bzw. Abbildung 7.5 dargestellt³.

Das Bouc-Wen-Modell

Das dynamische Verhalten eines ERF-Dämpfers wird sehr zuverlässig durch das *Bouc-Wen-Modell* approximiert (siehe [102, 103, 104] und Abbildung 7.5(d)). Es besitzt folgende Gestalt

$$(7.1) \quad \begin{aligned} \dot{s}_1 &= \frac{1}{c_0 + c_1} (c_1 \dot{z}_D - \alpha s_2 - k_0 s_1) \\ \dot{s}_2 &= (A - \beta(1 + \operatorname{sgn}(\dot{s}_1 s_2)) s_2^2) \dot{s}_1 \end{aligned}$$

mit der Ausgabefunktion

$$(7.2) \quad F = c_1(\dot{z}_D - \dot{s}_1) + k_1(z_D - z_0)$$

als momentan anliegende Kraft. Hierbei sind z_D und \dot{z}_D die Anregung des Dämpfers in Form von Auslenkung und Geschwindigkeit des Kolbens. Zusätzliche Parameter geben die Abhängigkeit von der angelegten Feldstärke u_D wieder. Es ist

$$(7.3) \quad \dot{s}_3 = \eta(u_D - s_3)$$

³Aus der Literatur ist *kein* Kompaktmodell bekannt, welches zusätzlich Frequenz- oder Temperaturabhängigkeiten berücksichtigt.

mit $c_0 = c_{01} + s_3 c_{02}$, $c_1 = c_{11} + s_3 c_{12}$ und $\alpha = \alpha_1 + s_3 \alpha_2$. Die Zustände s_1, s_2, s_3 sind damit innere Variablen des virtuellen Modells eines solchen Dämpfers. Die elf reellwertigen Parameter $A, \beta, k_0, k_1, c_{01}, c_{02}, c_{11}, c_{12}, \alpha_1, \alpha_2, \eta$ sind für einen realen Prototypen eines ERF-Schwingungsdämpfers zu bestimmen (siehe Abschnitt 8.1).

Das Modell berücksichtigt den *Hysterese-Effekt* des ERF-Kennlinienfeldes und führt auf steife Differentialgleichungen. Bei Verwendung entsprechender numerischer Verfahren ist es zur Fahrdynamiksimulation innerhalb eines Fahrzeugmodells geeignet.

7.2 Modellierung der Kraftfahrzeugdynamik

Bei der Auswahl eines Fahrdynamikmodells spielt der gewünschte Einsatz, hier die Berechnung und Entwicklung von Regelungs- und Optimierungskonzepten für Schwingungsdämpfer, eine wesentliche Rolle.

7.2.1 Linearisierte Teilfahrzeugmodelle

Zustandsgrößen, die das längs-, quer- und insbesondere vertikaldynamische Verhalten wiedergeben, sind für den Fahrkomfort und Fahrsicherheit von besonderer Bedeutung. Dagegen ist in diesem Kontext eine detailgenaue Simulation von Größen wie etwa Fahrleistung, Emission, Luftwiderstand etc. unwesentlich.

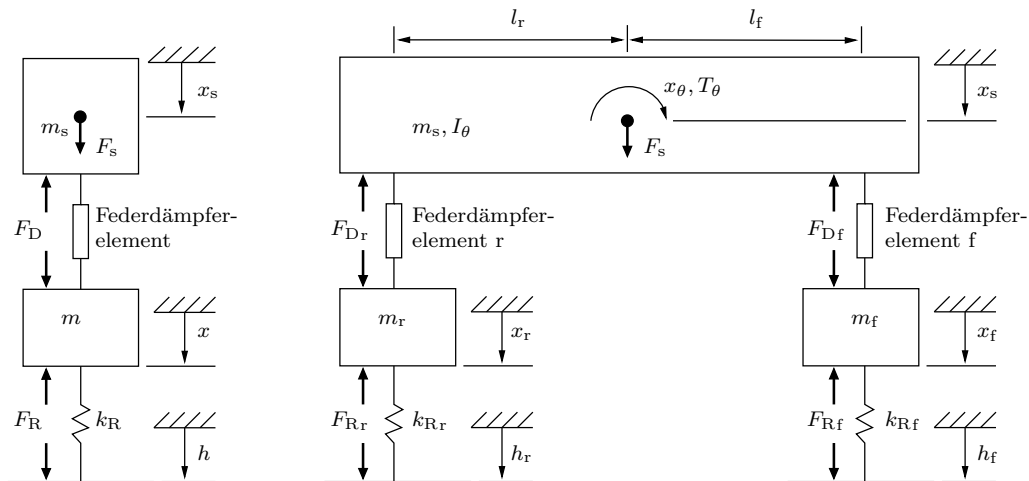


Abbildung 7.6: Viertelfahrzeugmodell (links) und Einspurmodell (rechts).

Grösse	Bezeichnung
$x_s, x_\theta, x_{r/f}$	Auslenkung von Aufbau, Neigungswinkel und Rad
m_s, I_θ	Aufbaumasse, Trägheitsmoment
F_D	Kraft am Feder-Dämpfer-Element
F_R	Radlast (hier als Feder modelliert, auch mit zusätzl. Dämpfung oder nichtlinearer Kennlinie möglich)
$h_{r/f}$	Straßenhöhe am hinteren (r) und vorderen (f) Rad
F_s, T_θ	Störkraft oder -moment an der Aufbaumasse

Es werden Schwingungen der einzelnen Fahrzeugmassen betrachtet, die durch Kräfte und Verbindungen, etwa durch Feder-Dämpfer-Elemente oder starre Verbindungen, gekoppelt sind. Hierfür eignen sich zunächst Viertelfahrzeug-, Einspur- oder Mehrspurmodelle (vgl. Abb.7.6 bzw. [117, 35, 79]). Sie zeichnen sich durch modulartigen Aufbau aus, so dass sie in geeigneter Weise durch die ERF-Schwingungsdämpfermodelle ergänzt werden können. Für das Viertelfahrzeugmodell von Abbildung 7.6 (links) ergibt sich

$$m\ddot{x} = F_R(x, \dot{x}, h) + F_D(x, \dot{x}, x_s, \dot{x}_s)$$

$$m_s\ddot{x}_s = F_s - F_D(x, \dot{x}, x_s, \dot{x}_s),$$

und entsprechend

$$m_f\ddot{x}_f = F_{Rf}(x_f, \dot{x}_f, h_f) + F_{Df}(x_f, \dot{x}_f, x_s, \dot{x}_s)$$

$$m_r\ddot{x}_r = F_{Rr}(x_r, \dot{x}_r, h_r) + F_{Dr}(x_r, \dot{x}_r, x_s, \dot{x}_s)$$

$$m_s\ddot{x}_s = F_s - F_{Df}(x_f, \dot{x}_f, x_s, \dot{x}_s) - F_{Dr}(x_r, \dot{x}_r, x_s, \dot{x}_s)$$

$$I_\theta\ddot{\theta} = T_\theta + l_f F_{Df}(x_f, \dot{x}_f, x_s, \dot{x}_s) - l_r F_{Dr}(x_r, \dot{x}_r, x_s, \dot{x}_s)$$

für das Einspurmodell von Abbildung 7.6 (rechts). Die Radlasten und Kräfte der Federdämpferelemente ergeben sich aus den verwendeten Teilmodellen, d.h. im einfachsten Fall als lineare Feder-Dämpfer-Kräfte. Analog läßt sich ein Gesamtfahrzeugmodell für die vertikale Dynamik aufstellen.

Die erweiterten Spurmodelle ermöglichen die Berücksichtigung von Nick- und Wankbewegungen. Unberücksichtigt bleiben fahrdynamische Einflüsse durch übliche Manöver wie z.B.

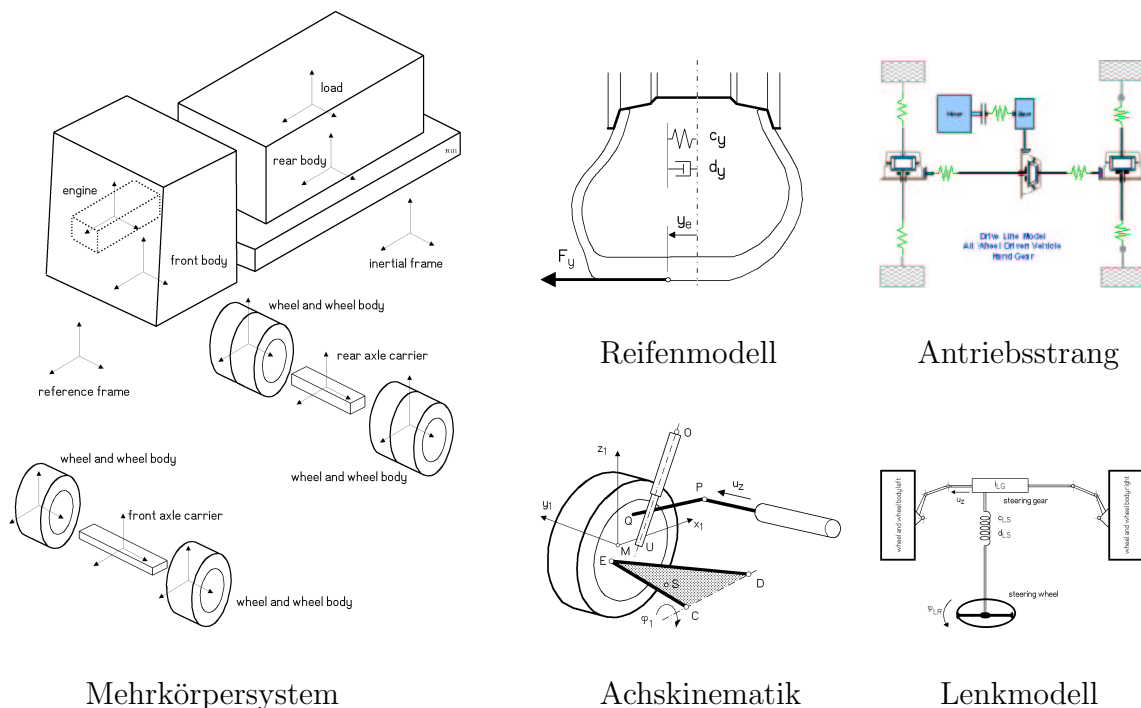


Abbildung 7.7: Teilfahrzeugmodelle der Gesamtfahrdynamiksimulation VEDYNA.

Beschleunigen, Bremsen etc. Deren indirekte Auswirkungen auf das Schwankungsverhalten der Aufbaumasse ermöglicht es jedoch, im Bedarfsfall die unvorhergesehenen und nicht vernachlässigbaren Einflüsse durch Störgrößen in Form von Aufbaubeschleunigungen und -momenten zu modellieren.

7.2.2 Gesamtfahrdynamikmodell zur Validierung in echtzeitfähigen Software-in-the-Loop Simulationen

Der Entwurf von zustandsabhängigen Steuerstrategien soll durch realistische Gesamtfahrdynamiksimulationen verifiziert werden. Hierfür wird das Programm VEDYNA verwendet (siehe [23, 112, 113] und Abbildung 7.7). In Echtzeit werden 56 nichtlineare dynamische Zustände des Fahrzeugs simuliert, wobei die wesentlichen Effekte eines komplexen Fahrzeugmodells berücksichtigt werden. Das Modell enthält ein System von neun Körpern bestehend aus Fahrzeugaufbau, Fahrwerksaufhängungen und Rädern. Teilmodelle beschreiben das Mehrkörpersystem, die Achskinematik, den Antriebsstrang, den Steuermechanismus und ein semi-empirisches Reifenmodell.

Die Wahl von Minimalkoordinaten ergibt für dieses Modell ein gewöhnliches Differentialgleichungssystem

$$(7.4-a) \quad \mathbf{M}_{BV}(\mathbf{y}_{BV}) \dot{\mathbf{z}}_{BV} = \mathbf{Q}_{BV}(\mathbf{y}_{BV}, \mathbf{z}_{BV}, \mathbf{y}_{ST}, \mathbf{z}_{ST}, \mathbf{y}_{DT}, \mathbf{z}_{DT})$$

$$(7.4-b) \quad \dot{\mathbf{y}}_{BV} = \mathbf{K}_{BV}^{-1}(\mathbf{y}_{BV}) \mathbf{z}_{BV}$$

$$(7.4-c) \quad \mathbf{M}_{DT} \dot{\mathbf{z}}_{DT} = \mathbf{Q}_{DT}(\mathbf{y}_{DT}, \mathbf{z}_{DT})$$

$$(7.4-d) \quad \dot{\mathbf{y}}_{DT} = \mathbf{V}_{DT} \mathbf{z}_{DT}$$

$$(7.4-e) \quad \mathbf{M}_{ST}(\mathbf{y}_{ST}, \mathbf{y}_{BV}) \dot{\mathbf{z}}_{ST} = \mathbf{Q}_{ST}(\mathbf{y}_{ST}, \mathbf{z}_{ST})$$

$$(7.4-f) \quad \dot{\mathbf{y}}_{ST} = \mathbf{V}_{ST} \mathbf{z}_{ST}$$

$$(7.4-g) \quad \mathbf{D} \dot{\mathbf{y}}_T = \mathbf{F}_{stat} - \mathbf{C} \mathbf{y}_T.$$

Hierbei beschreiben 24 Gleichungen (7.4-a,7.4-b) die Bewegungen der Körper von Fahrzeugaufbau und Achsen, 19 Gleichungen (7.4-c,7.4-d) das dynamische Verhalten des Antriebsstranges und der Winkelgeschwindigkeiten der Räder sowie fünf Gleichungen (7.4-e,7.4-f) die Steuermechanik. Das Reifenmodell 7.4-g der vertikalen Bewegungen besteht aus acht Differentialgleichungen, die lateralen Deformationen der Reifen sind bereits in (7.4-a) enthalten (siehe [97]).

Das Gleichungssystem (7.4-a)-(7.4-g) wird unter Berücksichtigung der Steifheit und der Echtzeitanforderung mit einem *semi-impliziten Eulerverfahren* bei konstanter Schrittweite numerisch integriert (siehe [23]), wobei die besondere Blockstruktur des Differentialgleichungssystems ausgenutzt wird. Das implementierte schnelle und stabile Verfahren ermöglicht echtzeitfähige Simulationen auf einem handelsüblichen PC (etwa mit Pentium-III-Prozessor).

7.3 Formulierung von Gütekriterien

Zur Optimierung werden messbare Funktionale benötigt, deren Werte durch optimale Trajektorien minimiert werden. Für Fahrsicherheit steht im Wesentlichen die Radlast, deren

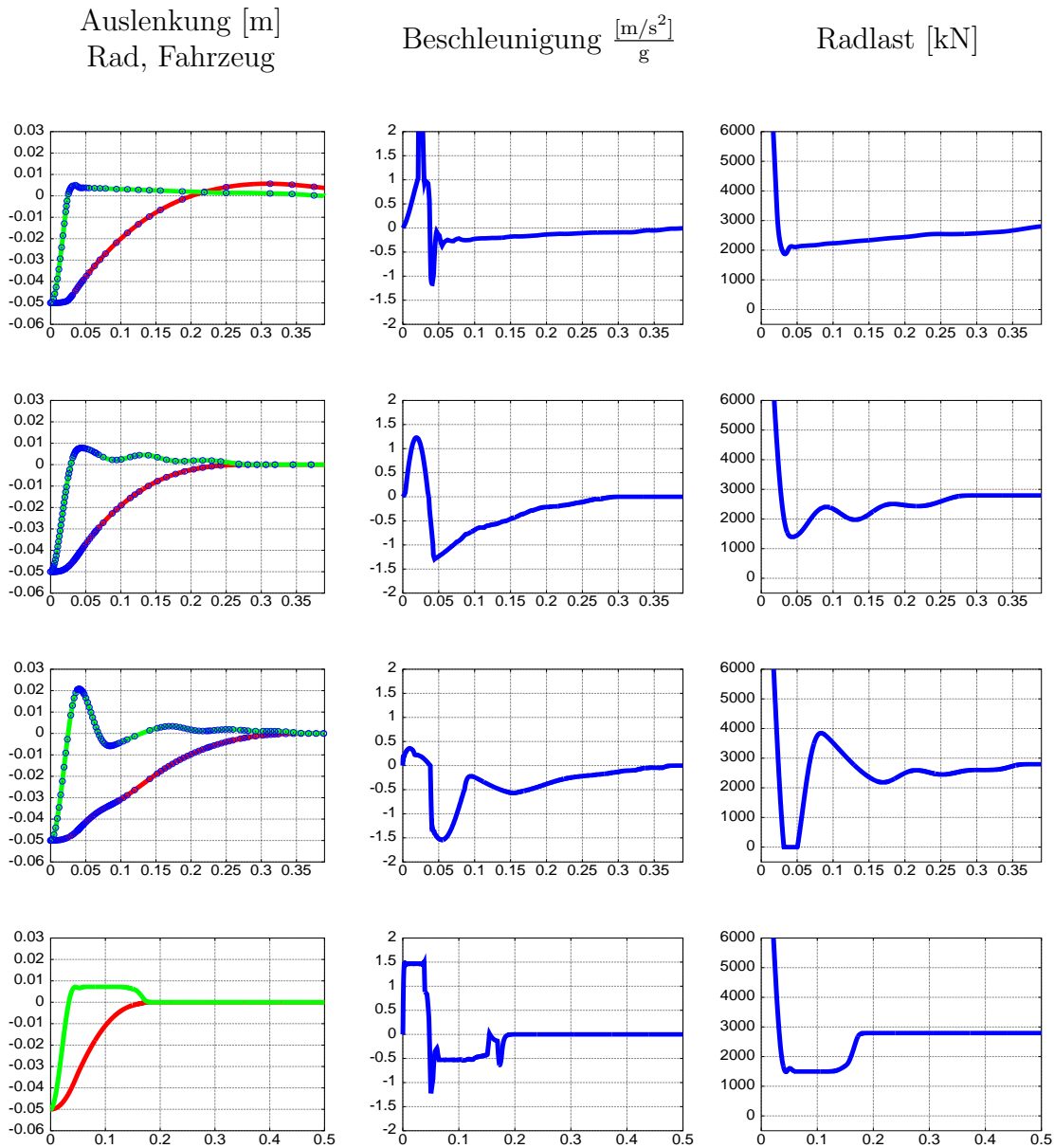


Abbildung 7.8: Vergleich der Ergebnisse unter verschiedenen Funktionalconfigurationen hinsichtlich Fahrsicherheit und -komfort (alle Kurven über der Zeit [s], Radauslenkung: helle Linie, Fahrzeugauslenkung: dunkle Linie). Steuerungen berechnet mit DIRCOL (vgl. Abschnitt 4.2.4), für allgemeine nicht-lineare beschränkte Optimalsteuerungsprobleme mit optimaler Dämpfung angewendet auf ein Viertelfahrzeugmodell entsprechend Abschnitt 7.5, hier mit fester Endzeit t_f .

1. Reihe: optimale Sicherheit, Komfort ignoriert
2. Reihe: optimaler Komfort unter Beschränkung der Radlast
3. Reihe: optimaler Komfort, Sicherheit ignoriert
4. Reihe: Verwendung einer Schlupfvariable.

Schwankungen die Kontaktkräfte zwischen Rad und Fahrbahn bestimmen. Zusätzlich können bei allgemeineren Fahrzeugmodellen Roll- und Schwimmwinkel berücksichtigt werden. Als Maß für den Fahrkomfort stehen in erster Linie die am Aufbau wirkenden Beschleunigungen bzw. Kräfte, insbesondere Kräfte in vertikal wirkender Richtung. Für die Modelle von Abschnitt 7.2.1 ergibt sich

$$L_{\text{Sicherheit}} = \mu_{\text{Sicherheit}} F_{\text{R}}^2 \quad L_{\text{Komfort}} = \mu_{\text{Komfort}} \ddot{x}_{\text{s}}^2.$$

Die Faktoren $\mu_{(\cdot)}$ sind Gewichts- und Skalierungsfaktoren.

Komfort und Fahrsicherheit sind entgegengesetzt wirkende Eigenschaften. Dieser *Antagonismus* spiegelt sich auch bei numerischer Berechnung von optimalen Trajektorien wieder. Um beide entsprechend zu berücksichtigen, müssen die Funktionale gemäß

$$L = \mu_{\text{Sicherheit}} L_{\text{Sicherheit}} + \mu_{\text{Komfort}} L_{\text{Komfort}}$$

geeignet gewichtet werden. Die Gewichtung hängt damit vom Zweck der Untersuchungen ab, d.h. davon, wie stark eine der beiden Eigenschaften bevorzugt wird. Es ist jedoch nicht möglich, optimale Werte bezüglich beider Kostenfunktionen zu gewährleisten, ohne Einfluss auf das jeweils andere Funktional zu nehmen.

Die Behandlung nichtlinearer Dynamik mit Ungleichungsbeschränkungen erweitert die Möglichkeiten zur Formulierung geeigneter Gütekriterien. Eine Alternative ergibt sich, wenn lediglich ein Funktional minimiert wird, wohingegen das jeweils entgegenwirkende durch einen geeigneten Maximalwert beschränkt wird:

$$\min L_1 \quad \text{mit} \quad L_2 \leq L_{2,\max}.$$

Dieser Ansatz führt gewöhnlich auf zufriedenstellende Ergebnisse.

Eine weitere Alternative besteht darin, den Wert einer Schlupfvariablen σ unter zusätzlichen Beschränkungen an die beiden Funktionale zu maximieren:

$$\max \sigma \quad \text{unter} \quad L_i \leq L_{i,\max} - \sigma, \quad i = 1, 2 \quad \sigma > 0,$$

was allerdings auf steifes Regelverhalten führt und daher nicht empfehlenswert ist. Abbildung 7.8 zeigt eine Studie bei Berechnung optimaler Dämpfungen unter den verschiedenen Funktionskonfigurationen.

7.4 Optimale und robust-optimale Rückkopplungssteuerungen linearisierter Teilfahrzeugmodelle

Um das Leistungsvermögen der semi-aktiven Dämpfungssteuerung mit ERF-Dämpfern zu testen, wurden für linearisierte Teilfahrzeugmodelle hinsichtlich der vertikalen Oszillationen der Fahrzeugkomponenten zustandsabhängige optimale Steuerungen berechnet und implementiert. Die allgemeine Problemformulierung besitzt die Gestalt

$$\dot{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_x, n_x} & \mathbf{I}_{n_x, n_x} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_k & \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_c \end{pmatrix}}_A \mathbf{x} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_x, n_u} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{B}_m \end{pmatrix}}_B \mathbf{u} + \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{0}_{n_x, n_g} \\ \mathbf{M}^{-1} \mathbf{D}_m \end{pmatrix}}_D \mathbf{w},$$

mit Nullmatrix $\mathbf{0}$, Einheitsmatrix \mathbf{I} , Massenmatrix \mathbf{M} , Steifigkeitsmatrix \mathbf{A}_k , Dämpfungsmatrix \mathbf{A}_c , Steuermatrix \mathbf{B}_m und Sörmatrix \mathbf{D}_m . Der Zustand \mathbf{x} wird durch \mathbf{u} gesteuert und von \mathbf{w} gestört. Das linear-quadratische Funktional

$$\mathcal{J}(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^\infty \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{u}^\top \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} \, dt$$

ist ein gewichtetes Kriterium für Sicherheit und Komfort für

$$\begin{aligned} \mathbf{Q} &= \mu_{\text{Komfort}} \sum_{\substack{\text{Zustände} \\ \text{Aufbau}}} \frac{1}{\ddot{z}_{i,\max}^2} \mathbf{A}^\top \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top \mathbf{A} + \mu_{\text{Sicherheit}} \sum_{\text{Rad}} \left[\frac{k_{Ri}}{F_{\text{stat.Radlast},i}} \right]^2 (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top) \\ &\quad \dots + \sum_{\text{Zustand}} \mu_{i,\text{Zustand}} \frac{1}{x_{i,\max}^2} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top), \\ \mathbf{R} &= \mu_{\text{Komfort}} \sum_{\substack{\text{Zustände-} \\ \text{Aufbau}}} \frac{1}{\ddot{z}_{i,\max}^2} \mathbf{B}^\top \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top \mathbf{B} + \mu_{\text{Aufwand}} \sum_{\text{Rad}} \frac{1}{u_{i,\max}} \mathbf{B}^\top \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top \mathbf{B}, \\ \mathbf{S} &= \mu_{\text{Komfort}} \sum_{\substack{\text{Zustände-} \\ \text{Aufbau}}} \frac{1}{\ddot{z}_{i,\max}^2} \mathbf{B}^\top \mathbf{e}_i \mathbf{e}_i^\top \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Hierbei beziehen sich die Summen über die Zustände des Fahrzeugaufbaus auf die vertikale Auslenkung und - falls gegeben - die Winkelauslenkungen. Summen über die Zustände der Räder erfassen die Radauslenkungen. Zusätzlich müssen bei linearer Dynamik beschränkende Strafterme für die einzelnen Zustände und insbesondere Steuerungen hinzugefügt werden, um Steuerbarkeit zu gewährleisten.

Die optimale Dämpfungskraft kann nun gemäß

$$\mathbf{u}^* = -\mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}^\top \mathbf{P} + \mathbf{S}) \mathbf{x}$$

berechnet werden, wobei $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ die Lösung der *algebraischen Riccati-Gleichung*

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - (\mathbf{P} \mathbf{B} + \mathbf{S}^\top) \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}^\top \mathbf{P} + \mathbf{S}) = \mathbf{0}$$

ist. Eine optimale Lösung der Aufgabe existiert, falls das System stabilisierbar, \mathbf{R} positiv definit und $\mathbf{Q} - \mathbf{S}^\top \mathbf{R}^{-1} \mathbf{S}$ positiv semidefinit ist. Optimale Steuerungen dieser Art sind als *linear-quadratische Regler (LQR)* bekannt und kommen in vielen verschiedenen Anwendungen zum Einsatz (siehe [32, 63, 68, 79, 80, 81, 17]).

Der linear-quadratische Ansatz erlaubt ebenso die direkte Berechnung robust-optimaler Steuerungen nach Kapitel 3 von Teil I (siehe [11], [10]). Störungen können durch Unebenheiten der Straße hervorgerufen werden. Denkbar ist auch die Berücksichtigung unbekannter Fahrmanöver, in deren Folge Trägheiten zu unvorhersehbaren Kraft- und Momenteinwirkungen führen.

Das erweiterte Funktional lautet

$$\mathcal{J}_\gamma(\mathbf{x}(\cdot), \mathbf{u}(\cdot)) = \int_0^\infty \mathbf{x}^\top \mathbf{Q} \mathbf{x} + 2\mathbf{u}^\top \mathbf{S} \mathbf{x} + \mathbf{u}^\top \mathbf{R} \mathbf{u} - \gamma^2 \mathbf{w}^\top \mathbf{w} \, dt,$$

Tabelle 7.1: Vergleich der optimalen Werte des Kostenfunktionalen hinsichtlich Sicherheit für ein simuliertes Viertelfahrzeug bei verschiedenen Dämpfungskonfigurationen. Sie geben Auskunft über die Ausbeute an messbarer Sicherheit bei konventioneller Dämpfung, mit semi-aktiv regelbaren Schwingungsdämpfern bzw. mit aktiven Fahrwerken durch Aktuatoren.

Optimierung bzgl. Sicherheit		Berechnung auf der Grundlage allgemeiner nichtlinearer optimaler Dämpfung bzw. Dämpfungskraft unter Berücksichtigung der entsprechenden Ungleichungsbeschränkungen.
opt. konst. Dämpfung	100%	
semi-aktive Dämpfung	61,4%	
aktive Dämpfung	37,4%	

und dessen Sattelpunktlösung existiert, falls $P_\gamma \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ Lösung der algebraischen Riccati-Gleichung

$$A^T P_\gamma + P_\gamma A + Q - \left[P_\gamma \begin{bmatrix} B & D \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S^T & 0^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\gamma^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B^T \\ D^T \end{bmatrix} P_\gamma + \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} \right] = 0$$

ist (siehe [11, 10]). Die resultierenden Steuergesetze sind durch

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^* &= \mathbf{R}^{-1} (\mathbf{B}^T P_\gamma + \mathbf{S}) \mathbf{x} \\ \mathbf{w}^* &= \frac{1}{\gamma^2} \mathbf{D}^T P_\gamma \mathbf{x} \end{aligned}$$

gegeben. Die Lösung ist robust-optimal, wenn \mathbf{u}^* sowohl das ungestörte als auch das gestörte System stabilisiert.

Bemerkung 7.1 Es ist zu beachten, dass für linearisierte Teilfahrzeugmodelle lediglich die optimale aktive Dämpfungskraft berechnet werden kann, nicht jedoch die optimale Dämpfung eines semi-aktiv regelbaren Schwingungsdämpfers. Semi-aktiv bedeutet: die Dämpfungskraft kann der Richtung der Kolbenbewegung nur entgegenwirken. Aktive Dämpfungssysteme sind technisch wesentlich aufwendiger und damit sehr teuer. In Tabelle 7.1 wird dargestellt, wie groß die messbaren Unterschiede des Minimierungsfunktionalen bei ungesteuerter, semi-aktiver und aktiver optimaler (open-loop) Schwingungsdämpfung sind, wenn hinsichtlich Sicherheit bei Fahrt über eine einfache Stufe optimiert wird. In Abschnitt 8.2.1 wird ein semi-aktiver Steueralgorithmus vorgeschlagen, der auf die Berechnung einer vorgeschlagenen optimalen Dämpfungskraft zurückgreift.

7.5 Nichtlineare robust-optimale Steuerungen

Mit den Methoden der Kapitel 3.4 und 4.2 werden nun *semi-aktive* robust-optimale Dämpfungssteuerungen u_{c_A} unter Berücksichtigung der technisch bedingten *Steuerbeschränkungen* an die Dämpfung berechnet. Verwendet wird der Ansatz für direkte Diskretisierungsverfahren gemäß Kapitel 3.4.3. Zur Durchführung der numerischen Berechnungen dient das Programm DIRCOL (vgl. Kapitel 4.2.4).

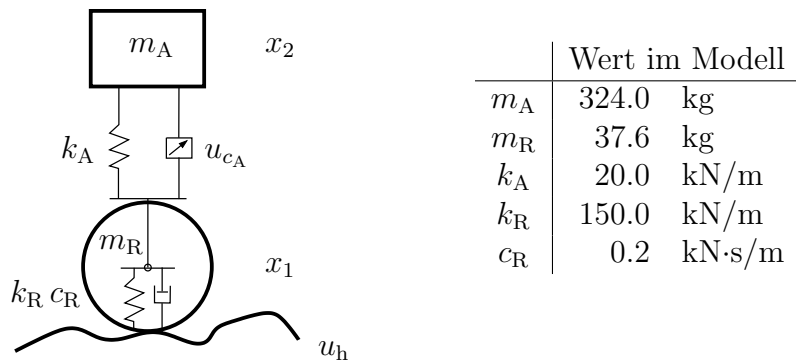


Abbildung 7.9: Viertelfahrzeugmodell

Betrachtet wird das Problem eines Viertelfahrzeugs

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ m_R \dot{x}_3 &= -(k_R(x_1 - u_h) + c_R x_3 + k_A(x_1 - x_2) + u_{c_A}(x_3 - x_4)) \\ m_A \dot{x}_4 &= -(k_A(x_2 - x_1) + u_{c_A}(x_4 - x_3))\end{aligned}$$

mit regelbarer Dämpfung als Steuervariable $\mathbf{u} = u_{c_A}$ und Straßenunebenheiten als Störung $\mathbf{w} = u_h$. Dabei unterliegen Steuerung und Störung folgenden Bedingungen

$$0 < u_{c_A, \min} \leq u_{c_A} \leq u_{c_A, \max},$$

$$u_h \in L_{2,e}.$$

Die Randbedingungen bei t_0 sind durch die Startwerte

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 = (x_{10}, x_{20}, x_{30}, x_{40})^T$$

und am freien Endzeitpunkt t_f gemäß

$$0 = x_1(t_f)^2 + x_2(t_f)^2 - \varepsilon^2$$

$$0 = x_3(t_f)$$

$$0 = x_4(t_f)$$

analog zu Beispiel 3.19 (Abschnitt 3.4.3) festgelegt. Das Sattelpunktproblem besitzt damit folgendes Funktional

$$\mathcal{J}_\gamma = \int_0^{t_f} C_t + C_h F_R(\mathbf{x}, u_h)^2 + C_c F_A(\mathbf{x}, u_{c_A})^2 - \gamma^2 u_h^2 dt,$$

mit gewichteten Termen für Endzeit t_f , Radlast F_R bzw. Aufbaubeschleunigung F_A mit

$$|F_R(\mathbf{x}, u_h)| = k_R(x_1 - u_h) + c_R x_3$$

$$|F_A(\mathbf{x}, u_{c_A})| = k_A(x_2 - x_1) + u_{c_A}(x_4 - x_3).$$

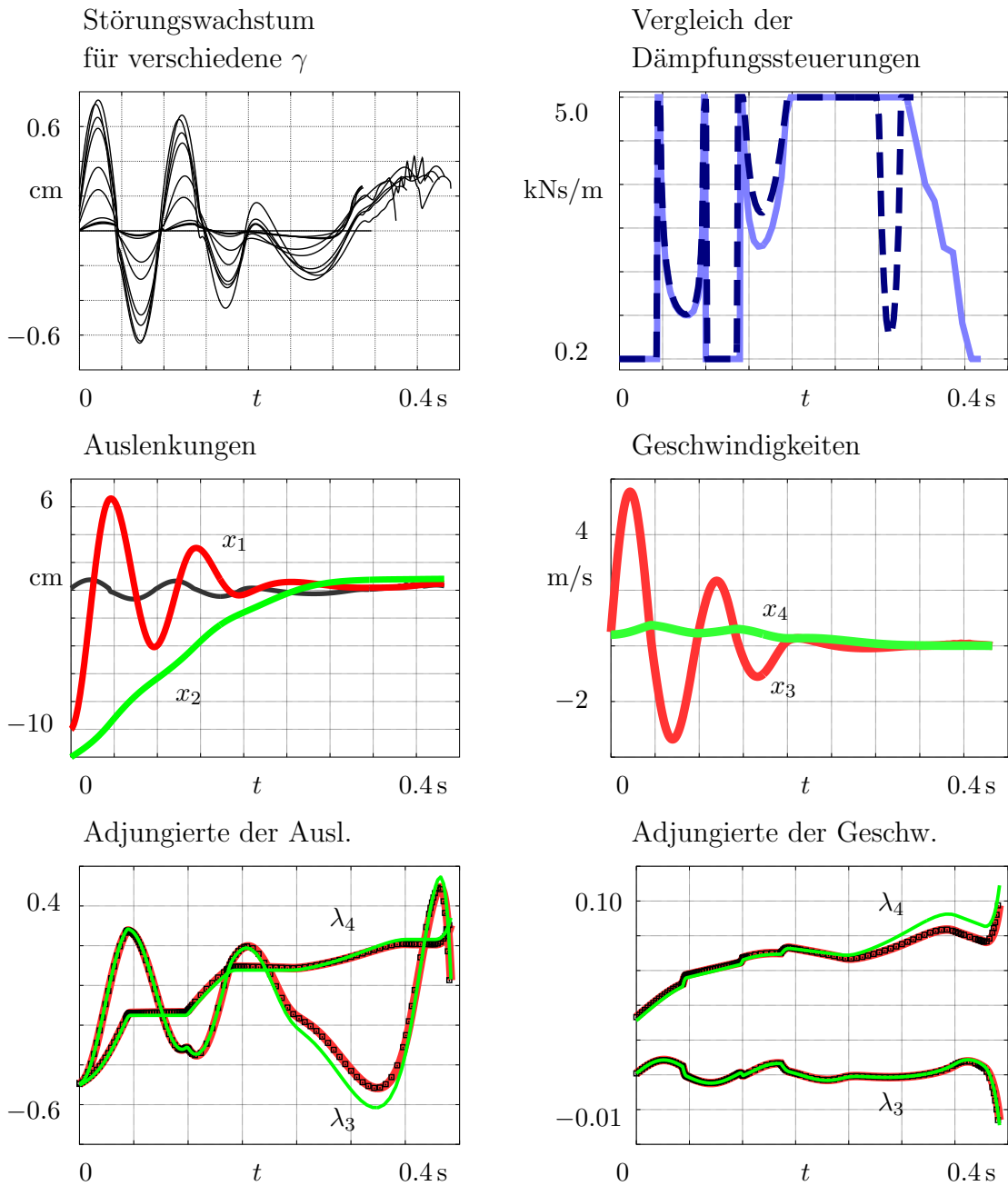


Abbildung 7.10: Robust-optimales Steuerungsproblem für das Viertelfahrzeug mit $C_h = 0.0, C_t = 0.1, C_c = 0.9/(m_A g)^2, g = 9.80665 \text{ m/s}^2$.

oben links	Störungswachstum für verschiedene γ -Werte, zu beachten ist das Wachstum der Störungsamplituden für sinkenden Verstärkungsfaktor γ bei konstanter Frequenz, (vgl. Tab. 7.2),
oben rechts	eine durch das Verfahren berechnete robust-optimale Dämpfungssteuerung (helle Linie) im Vergleich zur nachträglich mit Hilfe des Minimumprinzips aus den Werten $\mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}(t)$ berechneten Steuerung (strichliert), zu beachten ist die komplexe Schaltstruktur,
mitte links	Trajektorien der Ortskoordinaten x_1, x_2 , im Vergleich die entsprechende Störung u_h ,
mitte rechts	Trajektorien der Geschwindigkeitskoordinaten,
unten links	adjungierte Zustände der Auslenkung, im Vergleich die Schätzungen durch das Programm DIRCOL(hell),
unten rechts	adjungierte Zustände der Geschwindigkeiten, im Vergleich die Schätzungen durch das Programm DIRCOL(hell)

Tabelle 7.2: Statistik der Trajektorienberechnungen zu Abbildung 7.10 für eine Sequenz für verschiedene Werte von γ . IFAIL⁴ ist die Ausgabevariable der Optimierung durch SNOPT bzw. DIRCOL. Angegeben ist jeweils die Anzahl der Gitterpunkte der ersten und letzten Optimierung während der Gitterverfeinerung sowie die Anzahl der Gitterverfeinerungen. Die Gesamtrechenzeit ist die Summe über jeweils alle Optimierungen während der Gitterverfeinerung. Gesetzte Genauigkeitschranken für das nichtlineare beschränkte Minimierungsproblem⁵: $\varepsilon_{\text{opt}} = 1.0 \cdot 10^{-6}$, $\varepsilon_{\text{nft}} = 1.0 \cdot 10^{-8}$.

	γ	IFAIL	Gitterpunkte	Verfeinerungen	Gesamtrechenzeit
1	$5.00 \cdot 10^3$	0	65 – 129	6	123.27 s
2	$2.00 \cdot 10^2$	0	40 – 131	7	113.75 s
3	$1.90 \cdot 10^2$	0	40 – 129	7	99.68 s
4	$1.80 \cdot 10^2$	0	40 – 126	7	87.15 s
5	$1.50 \cdot 10^2$	0	40 – 124	7	92.45 s
6	$1.00 \cdot 10^2$	4	40 – 120	5	148.75 s
7	$0.80 \cdot 10^2$	4	40 – 115	5	82.30 s
8	$0.70 \cdot 10^2$	0	40 – 72	5	25.25 s
9	$0.69 \cdot 10^2$	0	80 – 136	6	262.63 s
10	$0.68 \cdot 10^2$	4	80 – 143	6	201.92 s
11	$0.64 \cdot 10^2$	4	90 – 144	5	188.07 s

Aus der Hamiltonfunktion erhalten wir die Differentialgleichungen der adjungierten Variablen

$$\begin{aligned}\dot{\lambda}_1 &= k_R \frac{\lambda_3}{m_R} + k_A \left(\frac{\lambda_3}{m_R} - \frac{\lambda_4}{m_A} \right) + 2C_c k_A F_A(\mathbf{x}, u_{c_A}) + 2C_h k_R F_R(\mathbf{x}, u_h) \\ \dot{\lambda}_2 &= -k_A \left(\frac{\lambda_3}{m_R} - \frac{\lambda_4}{m_A} \right) - 2C_c k_A F_A(\mathbf{x}, u_{c_A}) \\ \dot{\lambda}_3 &= -\lambda_1 + c_R \frac{\lambda_3}{m_R} + u_{c_A} \left(\frac{\lambda_3}{m_R} - \frac{\lambda_4}{m_A} \right) + 2C_c u_{c_A} F_A(\mathbf{x}, u_{c_A}) - 2C_h c_R F_R(\mathbf{x}, u_h) \\ \dot{\lambda}_4 &= -\lambda_2 - u_{c_A} \left(\frac{\lambda_3}{m_R} - \frac{\lambda_4}{m_A} \right) - 2C_c u_{c_A} F_A(\mathbf{x}, u_{c_A}),\end{aligned}$$

sowie wegen

$$H = \frac{k_R}{m_R} \lambda_3 u_h + C_h F_R(\mathbf{x}, u_h)^2 - \gamma^2 u_h^2 + H_{\text{Rest}}$$

die pessimistische Störung

$$u_h^* = \frac{k_R}{2m_R} \frac{\lambda_3 - m_R 2C_h (k_R x_1 + c_R x_3)}{\gamma^2 - C_h k_R^2}$$

⁴IFAIL= 0: die optimale Lösung wurde gefunden, IFAIL= 4: es wurde eine zulässige Lösung gefunden, ohne die verlangte Genauigkeit zu erreichen, (vgl. [37]).

⁵ ε_{opt} ... *zulässiger Optimalitätsfehler* engl. „optimality tolerance“, ε_{nft} ... *zulässiger Fehler für die nichtlinearen Beschränkungen* engl. „nonlinear feasibility tolerance“ (vgl. [116]).

mit der Bedingung

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u_h^2} = -2(\gamma^2 - C_h k_R^2) < 0 \quad \text{nur für } \gamma^2 > C_h k_R^2$$

an die Konkavität des Funktionals bzgl. u_h .

In Abbildung 7.10 sind die Ergebnisse einer Optimierung dargestellt. Deutlich sind die wachsenden Störungen für sinkende Verstärkungsfaktoren γ zu erkennen. Mit der Lösung des ungestörten Problems als Startlösung für sehr große Verstärkungsfaktoren lassen sich robust-optimale Steuerungen $u_{c_A}^*(t)$ für sinkendes γ berechnen. Die Adjungiertenschätzungen des Programms DIRCOL lassen sich zur Überprüfung der Lösungen verwenden (siehe hierzu Abschnitt 3.4.3).

Wie in Tabelle 7.2 zu erkennen ist, sind für die Berechnungen sehr viele Gitterpunkte notwendig. Die erzielten Genauigkeiten für kleinere Anzahlen von Gitterpunkten erweisen sich in der Regel als zu gering. Auch die vergleichsweise kleine Fehlertoleranz ist notwendig, um die Zulässigkeit der berechneten Trajektorien auch für die zusätzlich berechneten adjungierten Variablen zu gewährleisten (vgl. Abschnitt 3.4.3).

Kapitel 8

Validierung

8.1 Kalibrierung des ERF-Stoßdämpfermodells durch Parameteridentifikation

Um die Wirkung der ERF-Schwingungsdämpfer innerhalb von Kraftfahrzeugdynamiksimulationen mit dem Ziel der numerischen Vorhersage des Gesamtfahrverhaltens nachzubilden, kann ein dynamisches Modell des ERF-Dämpfers gemäß Kapitel 46 verwendet werden. Hierfür ist die Identifikation und Anpassung des Dämpfermodells erforderlich.

8.1.1 Das Verfahren

Verwendet wird das Verfahren PAREST([46, 45]). Es handelt sich hierbei um eine Methode zur Parameteroptimierung für differential-algebraische Systeme (**DAEs**, semi-explizit, Index 1). Damit ist es möglich, Systeme der Art

$$\eta_{ij} = h_i(\mathbf{t}_j, \mathbf{x}(t_j), \mathbf{v}(t_j), \mathbf{u}(t_j), \mathbf{p}) + \varepsilon_{ij}, \quad i \in I_j \subseteq \{1, \dots, n_h\}, 1 \leq j \leq n_t$$

η_{ij} ... Messwerte
 t_j ... Messzeitpunkte
 $h_i(t_j, \dots)$... Messfunktionen zum Zeitpunkt t_j

$$(8.1) \quad \min_{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_p}} r(\mathbf{p}) := \sum_{j=1}^{n_t} \sum_{i \in I_j} \omega_{ij} (\eta_{ij} - h_i(t_j, \mathbf{x}(t_j), \mathbf{v}(t_j), \mathbf{u}(t_j), \mathbf{p}))^2, \quad \omega_{ij} \geq 0, \text{ const.}$$

mit

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}^x(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{f}^v(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \\ \mathbf{0} &\leq \mathbf{g}(t, \mathbf{x}(t), \mathbf{v}(t), \mathbf{u}(t), \mathbf{p}) \\ \mathbf{0} &= \mathbf{r}(t_0, \mathbf{x}(t_0), \mathbf{v}(t_0), \mathbf{u}(t_0), t_f, \mathbf{x}(t_f), \mathbf{v}(t_f), \mathbf{u}(t_f), \mathbf{p}) \end{aligned}$$

zu behandeln. Die grau gefärbten Größen bzw. Gleichungen sind nicht auf die Parameteridentifikation des *Bouc-Wen* Modells anzuwenden. Es gilt $\mathbf{x} = (s_1, s_2, s_3)^T$.

Das Programm PAREST eignet sich wegen der steifen Eigenschaften des untersuchten Systems. Es ist ein direktes Verfahren im Sinne von Kapitel 4.2.2, dessen numerischer Integrator eine Modifikation des Verfahrens DASSL¹ ist.

Die Diskretisierung der differentiellen und algebraischen Variablen erfolgt auf einem Gitter $\Delta_{\mathbf{x}} = \{t_k^{\mathbf{x}} : t_0 = t_0^{\mathbf{x}} \leq t_1^{\mathbf{x}} \leq \dots \leq t_{N_{\mathbf{x}}}^{\mathbf{x}} = t_f\}$. Die Methode erlaubt es auch, Optimalsteuerungsprobleme zu lösen. Hierfür wird die Steuerung \mathbf{u} durch ein stückweise lineares stetiges Polynom auf einem weiteren Gitter $\Delta_{\mathbf{u}} = \{t_k^{\mathbf{u}} : t_0 = t_0^{\mathbf{u}} \leq t_1^{\mathbf{u}} \leq \dots \leq t_{N_{\mathbf{u}}}^{\mathbf{u}} = t_f\}$ parametrisiert. An diesen Punkten muss gegebenenfalls die Ungleichungsbeschränkung \mathbf{g} des Problems erfüllt werden. Auf einem weiteren Gitter $\Delta_{\mathbf{h}} = \{t_k^{\mathbf{h}} : t_0 = t_0^{\mathbf{h}} \leq t_1^{\mathbf{h}} \leq \dots \leq t_{N_{\mathbf{h}}}^{\mathbf{h}} = t_f\}$ soll die Messfunktion \mathbf{h} approximiert werden. Die drei Gitter sind voneinander unabhängig (bis auf gleiche Anfangs- und Endpunkte t_0, t_f).

Das Randwertproblem der Zustandsdifferentialgleichungen wird als *Schießverfahren* an das endlich-dimensionale Minimierungsproblem angekoppelt. Entsprechend wird eine Startschätzung der Zustandsvariablen $(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k) = (\bar{\mathbf{x}}(t_k^{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{v}}(t_k^{\mathbf{x}}))$ für $i = 0, \dots, N_{\mathbf{x}}$, der Parameter $\bar{\mathbf{p}} \in \mathbb{R}^{n_p}$ sowie ggf. der Steuerungen $\bar{\mathbf{u}}_k = \bar{\mathbf{u}}(t_k^{\mathbf{u}})$ für $k = 0, \dots, N_{\mathbf{u}}$, auf den entsprechenden Teilintervallen $[t_k^{\mathbf{x}}, t_{k+1}^{\mathbf{x}}]$ für $k = 0, \dots, N_{\mathbf{x}} - 1$ numerisch integriert. Das Residuum des Systems

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{k+1}^{\mathbf{x}}, \mathbf{u}^{\Delta}, \bar{\mathbf{p}}; \bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k) - \bar{\mathbf{x}}_{k+1} &= 0 & k = 1, \dots, N_{\mathbf{x}} - 1 \\ \mathbf{f}^v(t_k^{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k, \bar{\mathbf{u}}(t_k^{\mathbf{x}}), \bar{\mathbf{p}}) &= 0 & k = 1, \dots, N_{\mathbf{x}} \\ \mathbf{r}(t_0, \bar{\mathbf{x}}_0, \bar{\mathbf{v}}_0, \bar{\mathbf{u}}_0, t_f, \bar{\mathbf{x}}_{N_{\mathbf{x}}}, \bar{\mathbf{v}}_{N_{\mathbf{x}}}, \bar{\mathbf{u}}_{N_{\mathbf{u}}}, \bar{\mathbf{p}}) &= 0 \end{aligned}$$

mit dem Wert

$$\mathbf{x}(t_{k+1}^{\mathbf{x}}, \bar{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{p}}; \bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k) = \mathbf{x}(t_{k+1}^{\mathbf{x}})$$

der numerischen Integration zum Anfangswert $(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{\mathbf{v}}_k)$ bzgl. der parametrisierten Steuerung $\mathbf{u}^{\Delta} = (\bar{\mathbf{u}}_0^T, \dots, \bar{\mathbf{u}}_{N_{\mathbf{u}}}^T)$ und Parametervektor $\bar{\mathbf{p}}$ liefern Gleichungsnebenbedingungen für das diskretisierte endlich-dimensionale Minimierungsproblem. Unter Beachtung der nichtlinearen Ungleichungsbeschränkungen

$$\mathbf{g}(t_k^{\mathbf{u}}, \bar{\mathbf{x}}(t_k^{\mathbf{u}}), \bar{\mathbf{v}}(t_k^{\mathbf{u}}), \bar{\mathbf{u}}_k, \bar{\mathbf{p}}) \geq 0 \quad k = 0, \dots, N_{\mathbf{u}}$$

ergibt sich mit $\mathbf{x}^{\Delta} = (\bar{\mathbf{x}}_0^T, \dots, \bar{\mathbf{x}}_{N_{\mathbf{x}}}^T)$ und $\mathbf{v}^{\Delta} = (\bar{\mathbf{v}}_0^T, \dots, \bar{\mathbf{v}}_{N_{\mathbf{x}}}^T)$ für den Vektor

$$\mathbf{y} = (\mathbf{x}^{\Delta}, \mathbf{v}^{\Delta}, \mathbf{u}^{\Delta}, \bar{\mathbf{p}})$$

ein nichtlineares endlich-dimensionales beschränktes Minimierungsproblem

$$\mathcal{J}(\mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{y}) \quad \rightarrow \quad \min$$

$$\text{unter} \quad \mathbf{a}(\mathbf{y}) = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{y}) \geq \mathbf{0}.$$

¹DASSL numerisches Integrationsverfahren für differential-algebraische Gleichungen von Index 1, auf der Basis eines BDF Verfahrens mit Ordnungs- und Schrittweitensteuerung, Fortran77, siehe [88], dieses Programm wurde in [45] um eine entsprechende *Sensitivitätsanalyse* erweitert, die bei Verwendung im übergeordneten Minimierungsverfahren eine Bestimmung der Jacobimatrizen ermöglicht: DASSL_SENS, Fortran77

Für Probleme der Parameteridentifikation wird das Funktional durch das Residuum von Gleichung (8.1) auf dem Gitter Δ_h ersetzt.

Die Lösung dieser Minimierungsprobleme erfolgt entweder durch eine verallgemeinerte *Gauß-Newton-Methode* mit dem Programm NLSCON², oder durch *SQP-Verfahren* mit dem Programm NPSOL³ bzw. NLSSOL⁴.

8.1.2 Ergebnisse

Für die Identifizierung der Parameter des *Bouc-Wen-Modells* aus Abschnitt 46 stehen für eine Messreihe jeweils sechs Messzyklen für zwei verschiedene konstante angelegte Spannungen u_D zur Verfügung. Die Parameter wurden für jeweils vier Messzyklen identifiziert und anhand der beiden verbleibenden Messungen validiert. Es ergibt sich ein 4-fach parallel berechnetes System von Gleichungen für den Dämpfer mit gleichzeitig zu identifizierenden Parametern. Die Testbewegung ist jeweils ein Zyklus mit Daten für angelegte Kraft, Auslenkung und Auslenkungsgeschwindigkeit. Es werden periodische Randbedingungen angenommen.

Die Anzahl der Messwerte für eine Identifizierung der elf Parameter beträgt 456. Eine Berechnung mit dem oben erläuterten Verfahren auf einem PC mit Pentium-III-Prozessor nimmt ca. 200 s in Anspruch.

Die Parameteridentifizierung anhand von Messdaten eines Prototypen⁵ zeigen, dass der Kennlinienverlauf sehr gut durch das Modell wiedergegeben werden kann (vgl. Abb. 8.1).

Da die angelegten elektrischen Felder während der Messungen jeweils unverändert blieben, ist der Parameter η nicht identifizierbar. Notwendig zur Identifizierung aller Parameter wären ein oder mehrere Manöver innerhalb des typischen Arbeitsfrequenzspektrums eines Fahrzeugschwingungsdämpfers mit veränderlichem Spannungsverlauf.

Das Umschalten der Dynamik durch die Signum-Funktion (siehe Gleichung (7.1)) in den Modellgleichungen führt zu einer Folge von Unstetigkeiten, deren Lage nicht fest gegeben ist. Die Schaltstruktur ist bekannt, weshalb sich durch Einfügen von variablen Zwischenpunkten mit Sprungbedingungen bei der Diskretisierung der Zustandsvariablen dieses Problem beheben ließe. Alternativ wurde die Sprungfunktion $\text{sgn}(x)$ durch $\tanh(ax)$ approximiert. Der Faktor a wird hinreichend groß gewählt (etwa $a = 10^4$).

Zur **Validierung** der geschätzten Parametersätze sind Simulationen mit weiteren, nicht bei den Berechnungen verwendeten Messungen zu vergleichen. Abbildung 8.1 zeigt einen Vergleich zwischen simulierten und gemessenen Kraftverlauf spezieller Manöver für einen solchen Validierungssatz an Messdaten.

Die Identifikation der Parameter hat ergeben, dass der Anteil $k_1(z_D - z_0)$ der Ausgabefunktion für die Kraft am Dämpfer (vgl. Gleichung (7.2)), also der direkte Einfluss der Auslenkung des Dämpfers z_D , verschwindend gering und weit außerhalb der Genauigkeitsgrenzen liegt.

² NLSCON Gauß-Newton-Methode, Fortran77, Version 2.3, siehe [83]

³ NPSOL SQP-Verfahren, Fortran77, Version 4.0, siehe [38]

⁴ NLSSOL ein spezielles SQP-Verfahren für Minimierungsprobleme mit quadratischem Gütefunktional, Gill et al. 1994, Fortran77

⁵Zur Verfügung gestellt von der Firma Schenck Pegasus GmbH, Darmstadt

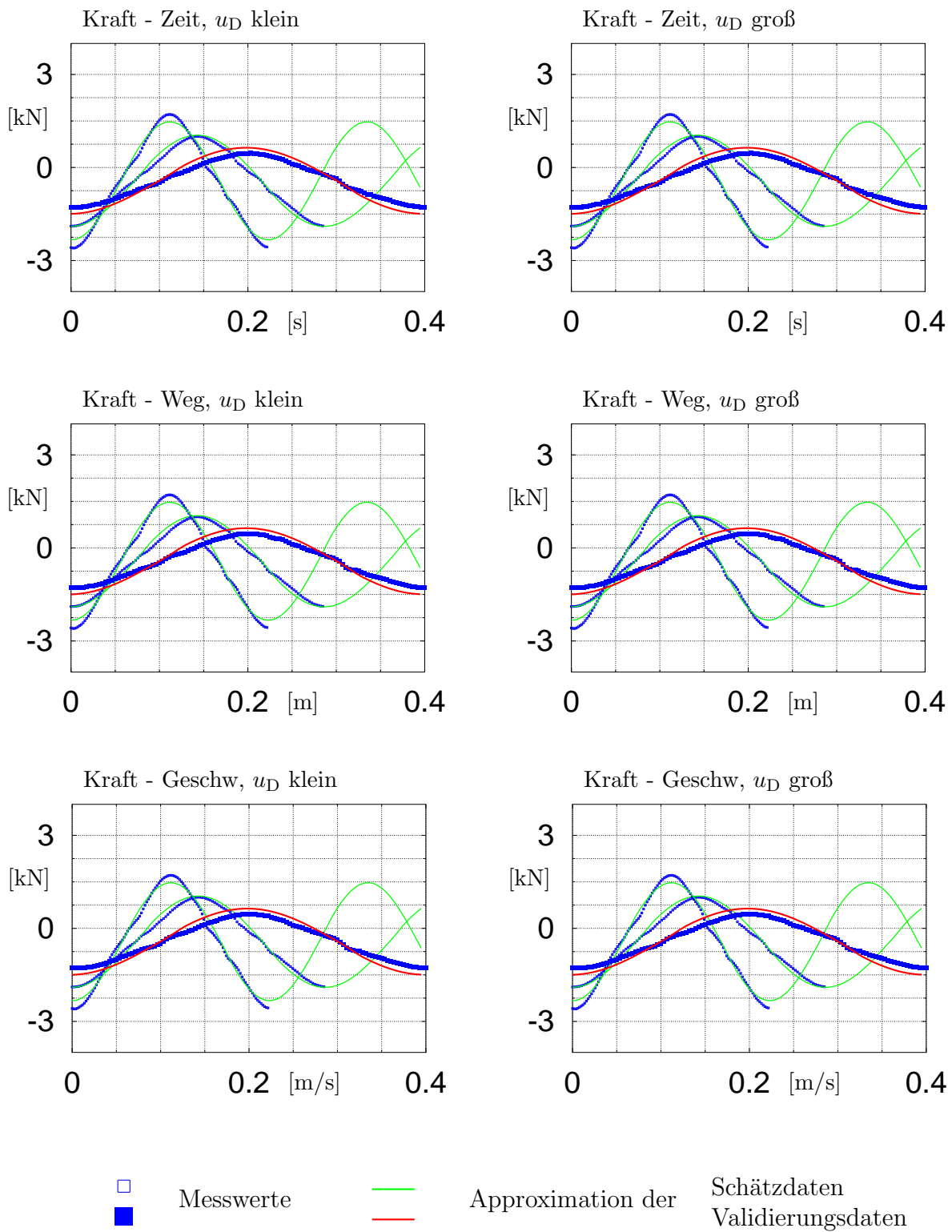


Abbildung 8.1: Validierung der berechneten Parameter. Die Parameter wurden anhand der Daten von vier Messzyklen geschätzt und mit weiteren zwei Messzyklen verglichen.

Daher ist es sinnvoll, die Parameter k_1 und z_0 durch einen neuen Parameter F_0 mit

$$F = c_1(\dot{z}_D - \dot{s}_1) + F_0$$

zu ersetzen. Alternativ kann der Parameter k_0 durch $k_0 = k_{01} + s_3 k_{02}$ ersetzt werden, um die Abhängigkeit des Modells von der anliegenden Feldstärken u_D weiter zu parametrisieren. Damit ergibt sich insgesamt

$$\mathbf{p} = (c_{11}, c_{01}, \alpha_1, A, \beta, c_{11}, c_{02}, \alpha_2, k_{01}, k_{02}, F_0)^T \in \mathbb{R}^{11}$$

als zu bestimmender Parametervektor.

Zusammenfassend ergibt sich folgende Einschätzung:

- Um insgesamt gute Approximationen des Dämpferverhaltens im typischen Arbeitsbereich zu erhalten, sollten die Manöver zur Messwerterfassung im gesamten Arbeitsbereich liegen. Die Ergebnisse sind besser, wenn insbesondere die Grenzbereiche der Charakteristiken in den Messungen repräsentiert werden. Die dynamischen Zustände des Dämpfers liegen dann hauptsächlich innerhalb des gemessenen Bereiches und werden interpoliert.
- Es stellt sich bei Untersuchungen zur Temperaturabhängigkeit heraus, dass das Modell die besonderen Eigenschaften der Charakteristiken bei sehr niedrigen Temperaturen nur unbefriedigend wiedergeben kann. Mittlere bis hohe Temperaturen bereiten dagegen keine Schwierigkeiten. Da bei dem hier betrachteten Schwingungsdämpfer im Arbeitsmodus eher hohe Temperaturen zu erwarten sind (der Dämpfer wandelt Bewegungsenergie in Wärme um), ist diese Modelleigenschaft unkritisch. Fahrdynamiksimulationen bleiben davon unberührt.
- Wichtig ist eine weitergehende Einbeziehung der Abhängigkeit vom anliegenden elektrischen Feld. Diese konnte bei diesen Untersuchungen nicht vollständig berücksichtigt werden, da bei den zur Verfügung gestellten, experimentellen Messungen die angelegten Feldstärken konstant gehalten worden waren.

8.2 Validierung eines Steueralgorithmus durch eine echtzeitfähige Software-in-the-Loop Simulation

8.2.1 Steueralgorithmus

Das linearisierte Problem erlaubt lediglich die Berechnung einer optimalen Dämpfungskraft, nicht jedoch der optimalen Dämpfung oder optimalen Feldstärke für das Ventil im ERF-Schwingungsdämpfer. Die Anregung mit der optimalen Dämpfungskraft wäre im Sinne einer aktiven Radaufhängung, was die Zuführung von Energie in das Feder-Dämpfer-System erfordern würde (vgl. Abschnitt 7.4).

Basierend auf der Berechnung der zustandsabhängigen optimalen Dämpfungskraft gemäß Abschnitt 7.4 wird unter Verwendung eines heuristischen Kompensationsreglers⁶ eine geeignete

⁶in Anlehnung an den „clipped optimal“-Algorithmus, siehe [103]

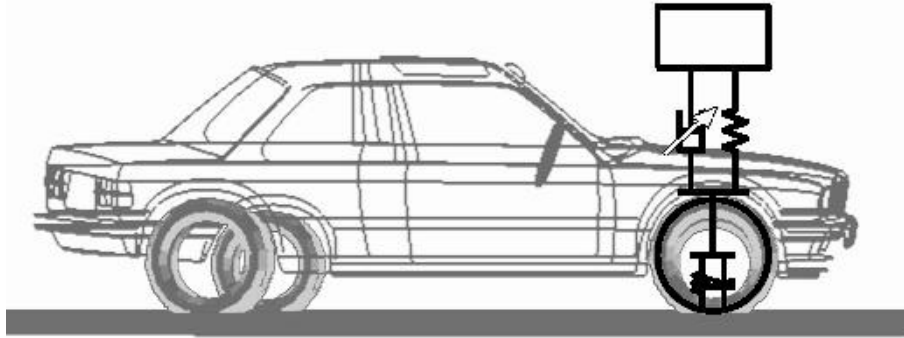


Abbildung 8.2: Beobachtermodell eines Viertelfahrzeugs bei der Validierung der vorgeschlagenen zustandsabhängigen Steuerstrategie.

Steuerung für den ERF-Schwingungsdämpfer angegeben

$$u = \begin{cases} u_{\min} & \text{falls } F_{\text{opt}} F_{\text{appl}} < 0 \\ \min(u_{\max}, \max(u_{\min}, u + (|F_{\text{opt}}| - |F_{\text{appl}}|) * K)) & \text{sonst.} \end{cases}$$

Hierbei ist F_{opt} die berechnete optimale Dämpfungskraft und F_{appl} die momentan wirkende Kraft. Dabei wird angenommen, dass eine Schätzung F_{appl} verfügbar ist. K hängt von der Skalierung von u ab.

Die Berechnung der optimalen Dämpfungskraft erfolgt für jeden der vier im Fahrzeug befindlichen Schwingungsdämpfer separat. Unter Verwendung eines *Kalman-Zustands-Schätzers* (siehe z.B. [29, 32]) wird der Zustand für jedes der zugehörigen Viertelfahrzeugmodelle berechnet, womit die Eingabedaten für die Berechnungen des Kapitels 7.4 gegeben sind.

Die Messbarkeit und Beobachtbarkeit des Systems spielt bei der Berechnung der optimalen Dämpfungskraft eine wesentliche Rolle. Um die momentan wirkende Kraft zu schätzen, wird angenommen, dass hierfür die Auslenkungsgeschwindigkeit des Stoßdämpfers sowie die Aufbaubeschleunigungen etwa durch Messungen gegeben sind.

Die Daten der Viertelfahrzeugmodelle entsprechen denen des betrachteten Gesamtfahrdynamikmodells. Es handelt sich hierbei um das Modell eines gewöhnlichen Personenkraftwagens.

8.2.2 Simulation der Gesamtfahrdynamik für ein Testmanöver zur Validierung der Steuerung

Für das im Folgenden beschriebene Testmanöver wird eine Steuerung entsprechend dem zuvor beschriebenen Vorgehen getestet. Die Funktionale zur Bestimmung der angestrebten *optimalen* Dämpfungskraft sind hinsichtlich *Sicherheit* gewichtet, d.h.

$$\mu_{\text{Sicherheit}} = 1, \quad \mu_{\text{Komfort}} = 0.$$

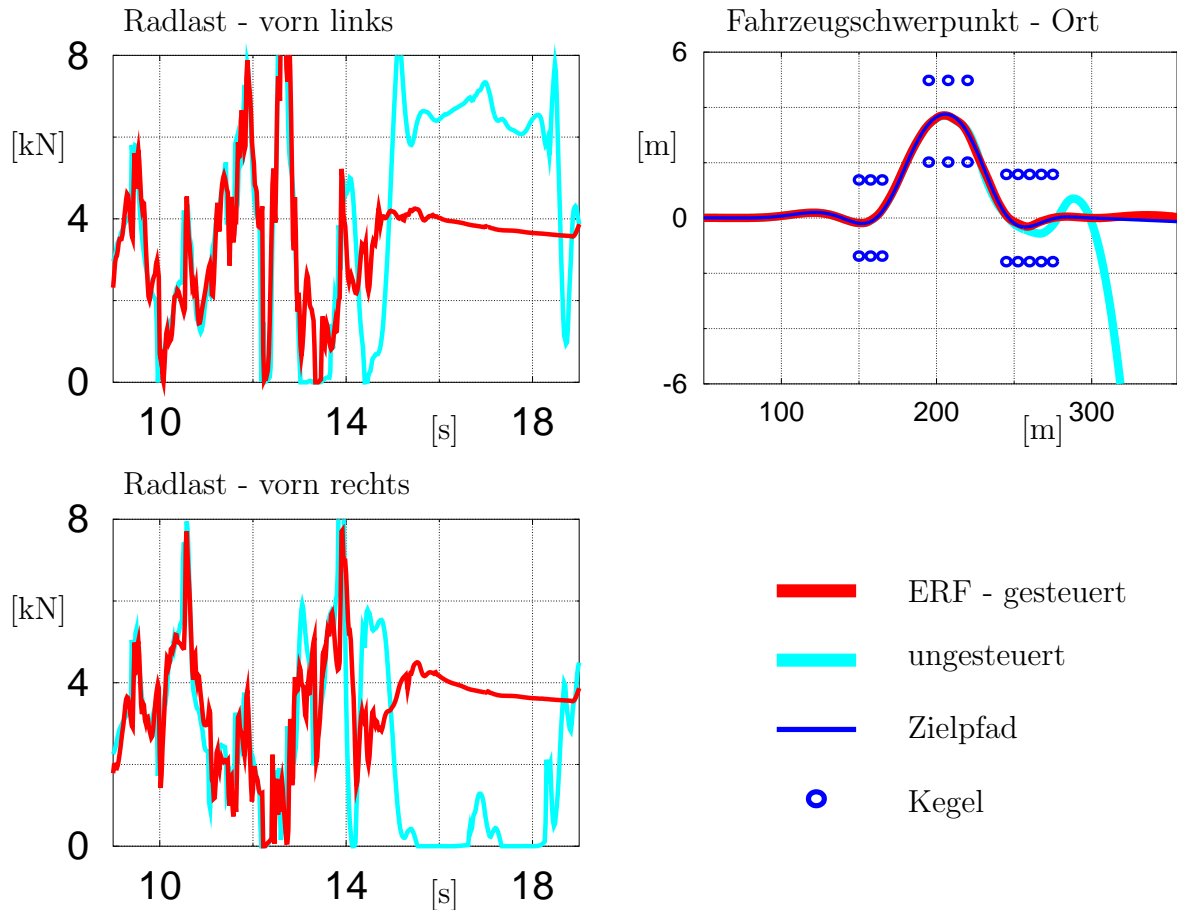


Abbildung 8.3: Zeitverlauf von Fahrweg und Radlasten bei der Validierung der vorgeschlagenen zustandsabhängigen Steuerstrategie in einer *Software-in-the-Loop Simulation*.

Ein typisches Testmanöver, der „doppelte Spurwechsel“ (*Elchtest*, vgl. Abbildung 8.3), wird auf einer extrem unebenen Straße simuliert. Dabei handelt es sich um ein Fahrmanöver, welches auf ebener Straße die Fahrzeit durch die Pylonengasse minimiert. Damit fährt das Fahrzeug mit einer Geschwindigkeit von ca. 100 km/h über eine sehr wellige Straße.

Ein Vergleich zweier unterschiedlich ausgerüsteter Fahrzeuge demonstriert die Anwendbarkeit der Steuerung für ERF-Stoßdämpfer.

- (i) Das Fahrzeug *mit* ERF-Stoßdämpfern verbleibt auf dem vorgegebenen schnellstmöglichen Kurs durch die Kegelreihe.
- (ii) Dagegen gerät das Fahrzeug *ohne* regelbare Schwingungsdämpfer, d.h. mit herkömmlicher Radaufhängung, ins Schleudern.

Die verschiedenen Radlastschwankungen des Manövers sind in Abbildung 8.3 dokumentiert. Deutlich erkennbar sind die Unterschiede beim rechten Vorderrad im kritischen Moment.

Eine Sequenz der visualisierten Software-in-the-loop-Simulationen beider Fahrmanöver ist in Abbildung 8.4 dargestellt.

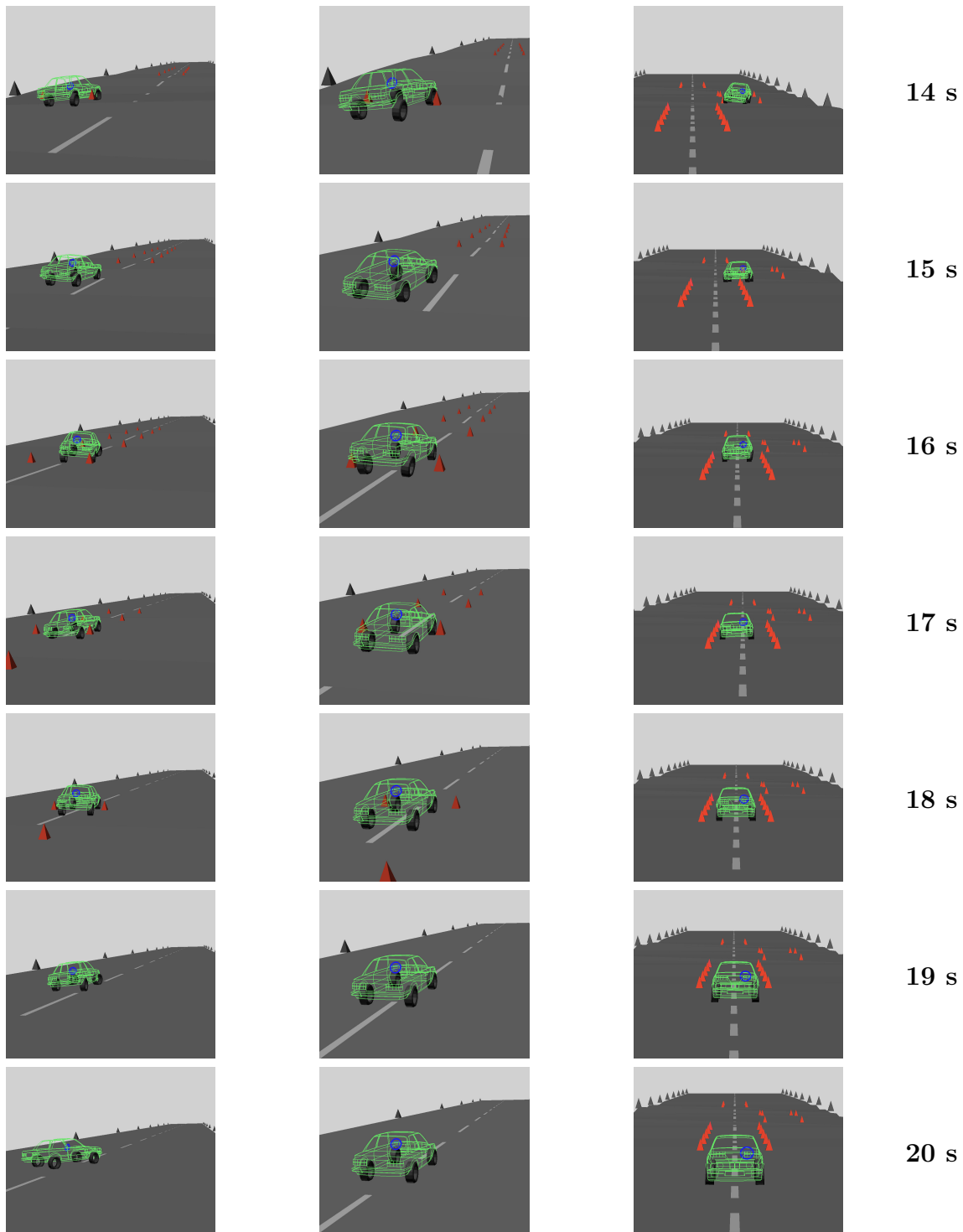


Abbildung 8.4: Visualisierung der Software-in-the-loop-Simulation eines Fahrmanövers: *Doppelter Spurwechsel* durch die Pylonengasse auf sehr unebener Straße bei Fahrt mit hoher Geschwindigkeit (≈ 100 km/h) Links: mit konventioneller un geregelter Schwingungsdämpfung, Mitte/Rechts: mit geregelten ERF-Schwingungsdämpfern aus verschiedenen Perspektiven beobachtet.

Die realistischen Simulationsergebnisse führen auf zwei wesentliche Schlussfolgerungen:

- (i) Semi-aktiv geregelte Schwingungsdämpfer können das Fahrverhalten hinsichtlich Sicherheit deutlich verbessern. Hierbei spielt die Verwendung der ERF-Schwingungsdämpfer eine entscheidende Rolle, denn sie ermöglichen minimale Reaktionszeiten bei hohen Stellkräften.
- (ii) Es wird die Verwendungsfähigkeit des in Abschnitt 8.2.1 beschriebenen fast-optimalen Steueralgorithmus unter Beweis gestellt.

Kapitel 9

Zusammenfassung

In der vorliegenden Arbeit werden grundlegende Eigenschaften und Erweiterungen des H_∞ -Robustheitsbegriffes auf allgemeine nichtlineare Systeme untersucht. Der Fokus liegt dabei auf den theoretischen Grundlagen, den numerischen Lösungsansätzen sowie der Anwendung bei der Schwingungsdämpfung von Kraftfahrzeugen.

Mit einer der untersuchten und implementierten Methoden werden zustandsabhängige optimale und robust-optimale Steuerungen für linearisierte Teilmodelle für Kraftfahrzeuge explizit berechnet. Die hierfür erforderlichen Eingabedaten werden auf der Basis eines Beobachtermodells zur Verfügung gestellt. In einer echtzeitfähigen Software-in-the-Loop Simulation für ein realistisches Gesamtfahrzeugdynamikmodell wird der entworfene Steueralgorithmus getestet und validiert. Für ein extremes Fahrmanöver auf unebener Straße wird das verbesserte Fahrverhalten mit semi-aktiv geregelten Schwingungsdämpfern demonstriert.

Eine wesentliche Fragestellung bei der Berechnung optimaler Steuerungen ist die Modellierung von Gütekriterien für Fahrkomfort und Fahrsicherheit. Die Gewichtung der beiden in hohem Maße antagonistisch wirkenden Funktionale wird im Zusammenhang mit den vorliegenden technischen Zielsetzungen und den zur Verfügung stehenden mathematischen Methoden behandelt, so dass verschiedene Lösungsmöglichkeiten aufgezeigt werden. Ein Dynamikmodell für einen kontinuierlich steuerbaren Stoßdämpfer mit elektrorheologischen Fluiden wurde anhand von Messdaten eines Prototypen kalibriert und validiert.

Zur Erweiterung des H_∞ -Robustheitsbegriffes auf den allgemeinen nichtlinearen Fall werden dynamische Systeme hinsichtlich ihrer Dissipativität untersucht. Dies führt auf die Hamilton-Jacobi-Isaacs-Gleichung, d.h. auf Lösungen von Sattelpunktproblemen. In dieser Arbeit werden daher zur Lösung robust-optimaler Steuerungen lokale deterministische Trajektorien der hergeleiteten Differentialspiele berechnet. Es ergeben sich Steuerungen bezüglich eines fest gewählten Verstärkungsniveaus. Der Einfluss des Verstärkungsniveaus als Gewichtung zwischen maximaler Robustheit und Optimalität wird untersucht und diskutiert.

Zur numerischen Berechnung von Sattelpunkttrajektorien wird ein Ansatz unter Anwendung direkter Diskretisierungsverfahren untersucht, welche für die numerische Behandlung von reinen Optimalsteuerungsproblemen entwickelt worden sind. Bei der Untersuchung der Konsistenz dieser Diskretisierungen ergeben sich neue Aussagen über die Konsistenzordnung für eine ganze Klasse von Kollokationsverfahren sowie eine verbesserte Schätzung der adjungierten Variablen.

Literaturverzeichnis

- [1] Bayer AG. Provisional Product Information. Rheobay TP AI 3565 and Rheobay TP AI 3566. In *Silicones Business Unit, No. AI 12601e*, Leverkusen, 1997. 103
- [2] Bayer AG and Carl Schenck AG. Aktive ERF-Schwingungsdämpfer — Eine Gemeinschaftsentwicklung der Carl Schenck AG und der Bayer AG. In *Produktinformation*, Darmstadt, Leverkusen, 1998. 103
- [3] W. Backé, G. Fees, and H. Murrenhof. Innovative Fluidtechnik — Hochdynamischer Servoantrieb mit elektrorheologischen Flüssigkeiten. *Ölhydraulik und Pneumatik (o+p)*, 41:11–12, 1997. 103
- [4] A. Ball and J. W. Helton. Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations Arising in Nonlinear H_∞ Control. *Journal of Mathematical Systems, Estimation, and Control*, 6(1), 1996. 37, 47
- [5] J. A. Ball and J. W. Helton. H_∞ Control for nonlinear plants: Connections with Differential Games. In *Proceedings of the 28th Conference on Decision and Control*, pages 956–962, Tampa, Florida, December 1989. 37, 40
- [6] J. A. Ball, J. W. Helton, and M. L. Walker. H_∞ Control for nonlinear systems with output feedback. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 38(4):546–559, April 1993. 37, 47
- [7] T. Basar. Some Thoughts on Saddle-Point Conditions and Information Structures in Zero-Sum Differential Games. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 18(1):165–170, January 1976. 44
- [8] T. Basar. Informationally nonunique equilibrium solutions in differential games. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 15(4):636–660, July 1977. 44
- [9] T. Basar. Game Theory And H^∞ -Optimal Control: The Continuous Time Case. In *Proceedings of the 4th International Conference on Differential Games and Applications*, pages 171–186, Helsinki, August 1990. 47
- [10] T. Basar and P. Bernhard. *H^∞ -Optimal Control and Related Minimax Design Problems A Dynamic Game Approach*. Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1991. 37, 39, 40, 47, 54, 111, 112
- [11] T. Basar and G. J. Olsder. *Dynamic Noncooperative Game Theory*. Academic Press, London San Diego New York, 1995. 40, 42, 43, 44, 45, 111, 112

- [12] J. V. Breakwell and A. W. Merz. Toward a Complete Solution of the Homicidal Chauffeur Game. In *1st International Conference on Theory and Applications of Differential Games*, volume 3, pages 1–5, 1996. 46
- [13] M. Breitner, U. Rettig, and O. von Stryk. On optimal missile guidance upgrades with dynamic Stackelberg game linearizations. In *Annals of the International Society of Dynamic Games*, volume 7. Birkhäuser Verlag, 1997. 80
- [14] M.H. Breitner. *Robust optimale Rückkopplungssteuerungen gegen unvorhersehbare Einflüsse: Differentialspiellansatz, numerische Berechnung und Echtzeitapproximation*. Reihe 8: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik. VDI Verlag, Düsseldorf, 1996. 39, 45
- [15] M.H. Breitner, H.J. Pesch, and W. Grimm. Complex Differential Games of Pursuit-Evasion Type with State Constraints Part 1: Necessary Conditions for Optimal Open-Loop Strategies. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 78(3):419–441, September 1993. 55
- [16] M.H. Breitner, H.J. Pesch, and W. Grimm. Complex Differential Games of Pursuit-Evasion Type with State Constraints Part 2: Numerical Computation of Optimal Open-Loop Strategies. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 78(3):443–463, September 1993. 55
- [17] H. Bremer. *Dynamik und Regelung dynamischer Systeme*. Leitfäden der angewandten Mathematik und Mechanik LAMM. Teubner Studienbücher, Berlin Heidelberg ..., 1988. 111
- [18] A. E. Bryson and Y. C. Ho. *Applied Optimal Control*. Hemisphere Publishing Corporation, New York, 1975. 20, 28, 31, 42, 43
- [19] A.E. Bryson, W.F. Denham, and S.E. Dreyfus. Optimal Programming Problems with Inequality Constraints I: Necessary Conditions for Extremal Solutions. *AIAA J.*, 1(11):2544–2550, 1963. 33
- [20] R. Bulirsch. Die Mehrzielmethode zur numerischen Lösung von nichtlinearen Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung. Technical Report R1.06, Carl-Cranz-Gesellschaft e.V., Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt (DLR), Oberpfaffenhofen, Germany,, 1971. 65
- [21] T. Butz, C. Chucholowski, M. Ehmman, U. Rettig, O. von Stryk, and T.-M. Wolter. Test und Validierung von Fahrdynamikregelungen mittels Hardware- und Software-in-the-Loop Simulation. *thema Forschung, Heft 1/2002: Eingebettete Systeme (Technische Universität Darmstadt)*, pages 42–49, 2002. 102
- [22] T. Butz and O. von Stryk. Modelling and simulation of electro- and magnetorheological fluid dampers. *Z. angew. Math. Mech.*, 82(1):3–20, 2002. 103, 105
- [23] C. Chucholowski, M. Vögel, O. von Stryk, and T.-M. Wolter. Real time simulation and online control for virtual test drives of cars. In H.-J. Bungartz, F. Durst, and Chr.

- Zenger (eds.): *High Performance Scientific and Engineering Computing.*, volume 8 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, pages 157–166, 1999. 108
- [24] K. Chudej and M. Günther. Global State Space Approach for the Efficient Numerical Solution of State-Constrained Trajectory Optimization Problems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 103(1):75–93, 1999. 33
- [25] Lord Corporation. Rheonetic MagnetoRheological (MR) Fluid Technology. *World Wide Web*: <http://www.mrfluid.com/>, Cary, North Carolina, 1997. 103
- [26] P. Deuffhard. A Modified Newton Method for the Solution of Ill-Conditioned Systems of Nonlinear Equations with Applications to Multiple Shooting. *Numerische Mathematik*, 22:289–315, 1974. 65
- [27] P. Deuffhard. Relaxation Strategy for the Modified Newton Method. In R. Bulirsch et al. (ed.): *Optimization and Control*, number 477 in *Lecture Notes in Mathematics*, Berlin, Heidelberg, New York, 1975. 65
- [28] P. Deuffhard and F. Bornemann. *Numerische Mathematik II*. Walter de Gruyter, Berlin, 1994. 81
- [29] P. Dorato, C. Abdallah, and V. Cerone. *Linear Quadratic Control: An Introduction*. Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1994. 20, 122
- [30] J. C. Doyle, K. Glover, P. P. Khargonekar, and Francis B. A. State-Space Solutions to Standard H_2 and H_∞ Control Problems. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 34(8):831–846, August 1989. 37
- [31] R. C. Ehrgott and S. F. Masri. Modelling the oscillatory dynamic behavior of electrorheological materials in shear. *Smart Materials and Structures*, 1:275–285, 1992. 105
- [32] O. Föllinger. *Regelungstechnik Einführung in die Methoden und ihre Anwendung*. Hüthig Buch Verlag, Heidelberg, 1994. 20, 111, 122
- [33] H. P. Gavin, R. D. Hanson, and F. E. Filisko. Electrorheological Dampers, Part I: Analysis and Design. *Journal of Applied Mechanics*, 63:669–675, 1996. 104
- [34] H. P. Gavin, R. D. Hanson, and F. E. Filisko. Electrorheological Dampers, Part II: Testing and Modelling. *Journal of Applied Mechanics*, 63:676–682, 1996. 104
- [35] G. Genta. *Motor Vehicle Dynamics, Modelling and Simulation*, volume 43 of *Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences*. World Scientific, Songapore, New Jersey, London, Hong Kong, 1997. 102, 107
- [36] P. E. Gill, W. Murray, and M. H. Wright. *Practical Optimization*. Academic Press, 1981. 67
- [37] P.E. Gill, W Murray, and M.A. Saunders. User’s Guide for Snopt 5.3: A Fortran Package Large-Scale Nonlinear Programming. Technical report, UCSD, California, December 1998. 95, 115

- [38] P.E. Gill, W Murray, M.A. Saunders, and M.H. Wright. User's Guide for NPSOL (Version 4.0). Technical Report SOL 86-2, Department of Operations Research, Stanford University, 1986. 119
- [39] R. Griesse and A. Walther. Evaluating Gradients in Optimal Control - Continuous Adjoint versus Automatic Differentiation. *Preprint-Reihe IOKOMO, Technische Universität Dresden*, 2001. 70, 88
- [40] W. Grimm. Convergence Relations between Optimal Control and Optimal Parametric Control. Report 420, Institut für Flugmechanik und Flugregelung, Universität Stuttgart, Schwerpunktprogramm der DFG, Anwendungsbezogene Optimierung und Steuerung, 1993. 69
- [41] W. Grimm and A. Markl. Adjoint Estimation from a Direct Multiple Shooting Method. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 92(2):263–283, February 1997. 63
- [42] W. Grimm and H.J. Oberle. BNDSCO - A Program for the Numerical Solution of Optimal Control Problems. Technical Report No. 515, Institut for Flight System Dynamics, Oberpfaffenhofen, German Aerospace Research Establishment DLR, 1989. 65
- [43] W. W. Hager. Runge-Kutta methods in optimal control and the transformed adjoint system. *Numerische Mathematik*, 87:247–282, 2000. 70, 74, 80, 85
- [44] D.L. Hartsock, R.F. Nowak, and G.J. Chaundy. ER fluid requirements for automotive devices. *Journal of Rheology*, 35:1305–1326, 1992. 103
- [45] A. Heim. Parameteridentifizierung in differential-algebraischen Gleichungssystemen. Diplomarbeit, Mathematisches Institut, Technische Universität München, 1992. 117, 118
- [46] A. Heim and O. von Stryk. Documentation of PAREST - A multiple shooting code for optimization problems in differential-algebraic equations. Technical Report TUM-M9616, Mathematisches Institut, Technische Universität München, 1996. 117
- [47] J.W. Helton, M.R. James, and W.M. McEneaney. Nonlinear control: the joys of having an extra sensor. In *37th IEEE CDC*, pages 3518–3524, 1998. 37
- [48] J.W. Helton, M.R. James, and W.M. McEneaney. Measurement Feedback Nonlinear H_∞ Control: the Cheap Sensor Case (Part 1). *Submitted to IEEE Trans. Auto. Control.*, 1999. 37
- [49] P. Hiltmann. *Numerischen Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen und Aufgaben der optimalen Steuerung mit Steuerfunktionen über endlichdimensionalen Räumen*. Dissertation, Fakultät für Mathematik und Informatik, Technische Universität München, 1990. 65
- [50] P. Hiltmann, K. Chudej, and M. Breitner. Eine modifizierte Mehrzielmethode zur Lösung von Mehrpunkt-Randwertproblemen, Benutzeranleitung. Report Nr. 14, SFB 255, Transatmosphärische Flugsysteme, Lehrstuhl für Höhere Mathematik und Numerische Mathematik, Technische Universität München, 1993. 65

- [51] R.H.W. Hoppe, G. Mazurkevitch, U. Rettig, and O. von Stryk. Modeling, simulation, and control of electrorheological fluid devices. In H.-J. Bungartz et al. (ed.): *High Performance Scientific and Engineering Computing.*, volume 8 of *Lectures on Applied Mathematics*, pages 157–166. Springer-Verlag, 2000. 102, 104, 105
- [52] K. Horie. Cooperative Differential Games: the History. *LOGILAB/HEC, University of Geneva*, 1998. 55
- [53] K. Horie and B.A. Conway. Collocation with Nonlinear Programming for Zero-Sum Differential Games. *preprint, persönliche Mitteilung*, 6/2000. 55, 60
- [54] M. Horton and W.M. McEneaney. Computation of Max-Plus Eigenvector Representations for Nonlinear H_∞ Value Functions. In *ACC*, pages 1400–1404, 1999. 47
- [55] A. D. Ioffe and W. M. Tichomirov. *Theorie der Extremalaufgaben*. VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1979. 26, 27, 28, 29, 31, 67
- [56] R. P. Isaacs. *Differential Games*. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967. 31, 42, 43, 45, 46, 52
- [57] D.H. Jacobson, M.M. Lele, and J.L. Speyer. New Necessary Conditions of Optimality for Control Problems with State-Variable Inequality Constraints. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 35:255–284, 1971. 33
- [58] M.R. James and J.S. Baras. Partially Observed Differential Games, Infinite-Dimensional Hamilton-Jacobi-Isaacs Equations, and Nonlinear H_∞ Control. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 34(4):1342–1364, July 1996. 37, 47
- [59] M. R. Jolly, J. W. Bender, and J. D. Carlson. Properties and Applications of Commercial Magnetorheological Fluids. In *SPIE 5th Annual Int. Symposium on Smart Structures and Materials*, San Diego, March 1996. 103
- [60] G. M. Kamath and N. M. Wereley. System Identification of Electrorheological Fluid-Based Dampers Using a Nonlinear Viscoelastic-Plastic Phenomenological Model. In *Aerospace Sciences Conference*, Reno, NV, January 1997. 105
- [61] H. K. Khalil. *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1996. 12, 15, 20
- [62] E. Klingbeil. *Variationsrechnung*. Bibliographisches Institut - Wissenschaftsverlag, Zürich, 1977. 26, 27, 28, 31
- [63] B. Koslik, G. Rill, O. von Stryk, and D.E. Zampieri. Active suspension design for a tractor by optimal control methods. *Preprint SFB-438-9801, Sonderforschungsbereich 438*, page 23 S., 1998. 111
- [64] H. Kwakernaak. Minimax Frequency Domain Performance And Robustness Optimization Of Linear Feedback Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 30(10):994, October 1985. 37

- [65] R Lachner, M.H. Breitner, and H.J. Pesch. Three-Dimensional Air Combat: Numerical Solution of Complex Differential Games. In *New Trends in Dynamic Games and Applications*, volume 3 of *Annals of the International Society of Dynamic Games*, pages 165–190, 1995. 55
- [66] D. Lampe, A. Thess, and C. Dotzauer. MRF-Clutch — Design considerations and performance. In *Proc. Actuator 98*, Bremen, 1998. 103
- [67] G. Leitmann. *The Calculus of Variations and Optimal Control*. Plenum Press, New York, 1983. 26
- [68] Levine. *The Control Handbook*, volume 6 of *Electrical Engineering Handbook*. CRC Press, 1996. 111
- [69] J. Lewin. *Differential Games*. Springer-Verlag, Berlin, 1994. 42, 45, 52
- [70] D.J.N. Limebeer, B.D.O. Anderson, P. P. Khargonekar, and M. Green. A game theoretic approach to H_∞ control for time-varying systems. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 30(2):262–283, March 1992. 37
- [71] N. Makris, S. A. Burton, and P. T. Douglas. Elektrorheological damper with annular ducts for seismic protection applications. *Smart Materials Structures*, 5:551–564, 1996. 103
- [72] N. Makris, S. A. Burton, D Hill, and M Jordan. Analysis and design of ER-damper for seismic protection of structures. *Journal of engineering mechanics*, pages 1003–1011, October 1996. 103
- [73] N. Makris, S. A. Burton, I Konstantopoulos, and P. J. Antsaklis. Modelling The Response Of ER Damper: Phenomenology And Emulation. *Journal of engineering mechanics*, pages 897–906, September 1996. 103, 105
- [74] N. Makris, S. A. Burton, and D. P. Taylor. Electrorheological damper with annular ducts for seismic protection applications. *Smart Material Structures*, pages 551–564, 1996. 105
- [75] K. Malanowski, C. Büskens, and H. Maurer. Convergence of Approximations to Nonlinear Control Problems. *Preprint 98-3, Echtzeitorientierung großer Systeme, Schwerpunktprogramm der Deutschen Forschungsgemeinschaft*, 1998. 78
- [76] W.M. McEneaney. Robust/Game-Theoretic Methods in Filtering and Estimation. In *DARPA Symposium on Advances in Enterprise Control*, 1999. 37
- [77] W.M. McEneaney. The Max-Plus Eigenvector Algorithm for Nonlinear H_∞ Control. In *ACC*, 2000. 47
- [78] R. Mehlhorn and G. Sachs. A New Tool for Efficient Optimization by Automatic Differentiation and Program Transparency. *Optimization Methods and Software*, 4:225–242, 1994. 63

- [79] M. Mitschke. *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Band A: Antrieb und Bremsung. Springer-Verlag, Stuttgart, 1993. 107, 111
- [80] M. Mitschke. *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Band B: Schwingungen. Springer-Verlag, Stuttgart, 1993. 111
- [81] M. Mitschke. *Dynamik der Kraftfahrzeuge*. Band C: Fahrverhalten. Springer-Verlag, Stuttgart, 1993. 111
- [82] J. Nocedal and S.J. Wright. *Numerical Optimization*. Springer series in operations research. Springer, New York, Berlin, 1999. 67
- [83] U. Nowak and L. Weimann. NLSCON: Numerical solution of nonlinear (NL) least squares (S) problems with nonlinear constraints (CON), version 2.3 (Fortran 77). *Konrad Zuse Zentrum für Informationstechnik, Berlin*, 1992. 119
- [84] P.L.D. Peres, J.C. Geromel, and S.R. Souza. Optimal \mathcal{H}_∞ -State Feedback Control for Continuous-Time Linear Systems. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 82(2):343–359, August 1994. 37
- [85] H.J. Pesch. The Maximum Principle, Bellmann’s Equation, and Carathéodory’s Work. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 80(2):199–225, February 1994. 30
- [86] H.J. Pesch, I. Gabler, S. Miesbach, and M.H. Breitner. Synthesis of Optimal Strategies for Differential Games by Neural Networks. In *New Trends in Dynamic Games and Applications*, volume 3 of *Annals of the International Society of Dynamic Games*, pages 111–142, 1995. 55
- [87] N.K. Petek. An electronically controlled shock absorber using electrorheological fluid. *SAE Technical Paper 920275, Automotive Suspensions and Steering Systems, Int. Congress & Exposition, Feb. 24-28, Detroit, U.S.A.*, pages 67–72, 1992. 103
- [88] L. R. Petzold. A Description of DASSL: A Differential/Algebraic System Solver. Technical Report SAND82-8637, Sandia National Laboratories, Sep 1982. 118
- [89] R.M. Palhares P.L.D. Peres. Robust \mathcal{H}_∞ -Filtering Design with Pole Placement Constraint via Linear Matrix Inequalities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 102(2):239–261, August 1999. 37
- [90] L. S. Pontryagin. *The mathematical theory of optimal processes*. Number 55 in International series of monographs on pure and applied mathematics. Pergamon Press, Oxford, 1964. 26
- [91] K. Popp and W. Schiehlen. *Fahrzeugdynamik*. T.B. Teubner, Stuttgart, 1993. 102
- [92] J. A. Powell. Modelling the oscillatory response of an electrorheological fluid. *Smart Material Structures*, 3:416–438, 1994. 105
- [93] T. Raivio. *Computational Methods for Dynamic Optimization and Pursuit-Evasion Games*. Dissertation, Helsinki University of Technology, Systems Analysis Laboratory, Report A80, 2000. 60

- [94] U. Rettig and O. von Stryk. Numerical optimal control strategies for semi-active vehicle suspension with electrorheological fluid dampers. In K.-H. Hoffmann, R.H.W. Hoppe, and V. Schulz (eds.): *Fast Solution of Discretized Optimization Problems.*, volume 138 of *ISNM*, pages 221–241. Birkhäuser Verlag, 2001. 102
- [95] U. Rettig and O. von Stryk. Optimal and Robust Damping Control for Semi-Active Vehicle Suspension. In *in: ECMI 2002 (eingereicht)*, 2002. 102
- [96] I. Rhee and J.L. Speyer. A Game Theoretic Approach to a Finite Time Disturbance Attenuation Problem. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 36(9):1021–1032, September 1991. 37, 47
- [97] G. Rill. *Simulation von Kraftfahrzeugen*. vieweg, Braunschweig/Wiesbaden, 1994. 108
- [98] A. Schwartz. *Theory and Implementation of Numerical Methods Based on Runge-Kutta Integration for Solving Optimal Control Problems*. PhD thesis, University of California at Berkeley, 1996. 70
- [99] A. Schwartz and E. Polak. Consistent Approximations for Optimal Control Problems Based on Runge-Kutta Integration. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 34(4):1235–1269, July 1996. 70
- [100] J. Shinar and Y. Lipman. A Linear Pursuit-Evasion Game with a State Constraint for a Highly Maneuverable Evader. In *New Trends in Dynamic Games and Applications*, volume 3 of *Annals of the International Society of Dynamic Games*, pages 143–164, 1995. 55
- [101] P. Soravia. \mathcal{H}_∞ Control of Nonlinear Systems: Differential Games and Viscosity Solutions. *SIAM Journal of Control and Optimization*, 34(3):1071–1097, May 1996. 25, 37, 47, 49
- [102] B. F. Spencer Jr and J. D. Carlson. Magneto-rheological fluid dampers: scalability and design issues for application to dynamic hazard mitigation. In *Proc. Intern. Workshop on Structural Control*, Hong Kong, 1996. 104, 105
- [103] B. F. Spencer Jr, S. J. Dyke, M. K. Sain, and J. D. Carlson. Modeling and Control of Magnetorheological Dampers for Seismic Response Reduction. *Smart Materials and Structures*, 5:565–575, 1996. 103, 105, 121
- [104] B. F. Spencer Jr, S. J. Dyke, M. K. Sain, and J. D. Carlson. Phenomenological Model of a Magnetorheological Damper. *ASCE Journal of Engrg. Mech*, 123(3):1–9, 1996. 105
- [105] R. Stanway, D.J. Peel, and W. A. Bullough. Dynamic modelling of an ER vibration damper for vehicle suspension applications. *Smart Materials Structures*, 5:591–606, 1996. 105
- [106] J. Stoer and R. Bulirsch. *Introduction to Numerical Analysis, Second Edition*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1993. 9, 65

- [107] A. J. van der Schaft. *L₂-Gain and Passivity Techniques in Nonlinear Control*. Springer, Berlin, 1996. 21, 25
- [108] A.J. van der Schaft. *L₂-Gain Analysis of Nonlinear Systems and Nonlinear State Feedback H_∞ Control*. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 37(6):770–784, June 1992. 47
- [109] A.J. van der Schaft, H. Nijmeijer, and L. Magni. A receding-horizon approach to the nonlinear H_∞ control problem. *Automatica*, 37:429–435, 2001. 37, 47
- [110] B. van Keulen. *H[∞]-Control for Distributed Parameter Systems: A State-Space Approach*. Birkhäuser, Boston Basel Berlin, 1993. 20
- [111] T. L. Vincent and W. J. Grantham. *Nonlinear and Optimal Control Systems*. John Wiley & Sons, Inc, New York, 1997. 12, 15, 16, 17
- [112] M. Vögel and O. von Stryk. A guidance scheme for full car dynamics simulation. *Z. angew. Math. Mech.*, 79(2):363–364, 1999. 108
- [113] M. Vögel, O. von Stryk, and R. Bulirsch. An optimal control approach to real-time vehicle guidance. In W. Jäger et al. (ed.): *Mathematics - Key Technology for the Future*, 2001. 108
- [114] O. von Stryk. Numerical Solution of Optimal Control Problems by Direct Collocation. In R. Bulirsch, A. Miele, J. Stoer, and K.-H. Well (eds.): *Optimal Control - Calculus of Variations, Optimal Control Theory and Numerical Methods.*, volume 111 of *International Series of Numerical Mathematics*, pages 129–143. Birkhäuser, 1993. 76
- [115] O. von Stryk. *Numerische Lösung optimaler Steuerungsprobleme: Diskretisierung, Parameteroptimierung, und Berechnung der adjungierten Variablen*. Nr. 441, Reihe 8: Meß-, Steuerungs- und Regelungstechnik. VDI Verlag, Düsseldorf, 1995. 63, 76, 78, 79, 80, 91, 93, 97
- [116] O. von Stryk. User’s Guide for DIRCOL (Version 2.1): a direct collocation method for the numerical solution of optimal control problems. *Fachgebiet Simulation und Systemoptimierung (SIM), Technische Universität Darmstadt*, 2000. 76, 97, 115
- [117] G. W. Walker. *Constraints upon the Achievable Performance of Vehicle Suspension Systems*. Phd. dissertation, Girton College, Cambridge, 1997. 102, 107
- [118] W. Walter. *Gewöhnliche Differentialgleichungen*. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1996. 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15
- [119] M. Whittle, R.J. Atkin, and W.A. Bullough. Fluid dynamic limitations on the performance of an electrorheological clutch. *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 57:61–81, 1995. 103
- [120] J.C. Willems. Dissipative Dynamical Systems, Part I: General Theory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 45:321–351, 1972. 21
- [121] J.C. Willems. Dissipative Dynamical Systems, Part II: Linear Systems with Quadratic Supply Rates. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 45:352–393, 1972. 21

Anhang

A.1 Implementierungen

Schätzung der Adjungierten

loeseGLS.m

```
% lade die Runge-Kutta Koeffizienten
load delta -ascii;
load gamma -ascii;
load c_koe -ascii;

s = 3;

% lade die L"osung des Optimalsteuerungsproblems
pfad = ['h_',int2str(nn),'/'];
leseZustand_cc;

% Randbedingungen !!!
nR = nR0 + nRf;

RXO = [1 0 0
        0 1 0
        0 0 1];

RXN = [];

DPSINDXN = [0 0 1];

%-----
lambda = zeros(nX*((nT-1)*(s+1) + 1),1);
nu = zeros(nR,1);

lambda_nu = [lambda ; nu];

M = zeros( nX*((nT-1)*(s+1) + 2*nX , length(lambda_nu));
MRS = zeros( nX*((nT-1)*(s+1) + 2*nX , 1);

MI = diag(ones(nX,1));
MI1 = [MI ; MI; MI];
NL1 = zeros(size(MI1));
MIs = diag(ones(s*nX,1));
MC = zeros(nX,s*nX);
MB = zeros(s*nX,s*nX);

nM = nX*(s+1);

for k=1:nT-1

    hk = T(k+1)-T(k);

    xk1 = X(k ,:);
    xk3 = X(k+1,:);

    uk1 = U(2*k-1,:);
    uk2 = U(2*k ,:);
    uk3 = U(2*k+1,:);

    fk1 = ReS(xk1,uk1);
    fk3 = ReS(xk3,uk3);

    xk2 = 0.5*(xk1+xk3) + 0.125*hk*(fk1-fk3);

    FX1=AblReS(xk1,uk1);
    FX2=AblReS(xk2,uk2);
    FX3=AblReS(xk3,uk3);
```

```
MC = [c_koe(1)*FX1' c_koe(2)*FX2' c_koe(3)*FX3' ] ;

MB = [ delta(1,1)*FX1' delta(1,2)*FX2' delta(1,3)*FX3'
        delta(2,1)*FX1' delta(2,2)*FX2' delta(2,3)*FX3'
        delta(3,1)*FX1' delta(3,2)*FX2' delta(3,3)*FX3' ] ;

M((k-1)*nM+1:k*nM,(k-1)*nM+1:k*nM + nX) = ...
[MI      -hk*MC      -MI
 MI1     -MIs-hk*MB  NL1];

end

M0 = zeros(nX,nX);

MRO = [MI
        MO];

MRN = [ M0  RXO'          zeros(nRf,nX)'
        MI  zeros(nR0,nX)' -RXN'          ];

MRRS = [zeros(nX,1)
        DPSINDXN'   ];

M(k*nM+1:k*nM+2*nX,1:nX) = MRO;
M(k*nM+1:k*nM+2*nX,k*nM+1:k*nM+nX+nR) = MRN;

MRS(k*nM+1:k*nM+2*nX) = MRRS;

%Diskr. Adjungiertenvektor inkl. aller Komp und Stufen
Ld_nu = M\MRS;

Ld = Ld_nu(1:end-nR);
Nd = Ld_nu(end-nR+1:end);

%Ld in Komponenten aufgeteilt
LdK = [Ld(1:nX:end) Ld(2:nX:end) Ld(3:nX:end)];
%Stuetzstellen an den Gitterpunkten
LdKx = LdK(1:(s+1) :end,:);
LdK1 = LdK(2:(s+1):end,:); % 1. Stufe
LdK2 = LdK(3:(s+1):end,:); % 2. Stufe
LdK3 = LdK(4:(s+1):end,:); % 3. Stufe
```

Klassendefinitionen

Programm main.cc

```
#include "MinimumEnergy.h"

int main()
{
    MinimumEnergy a;

    a.DCInitParameter();
    a.DCInitWerte();

    a.DCInit_Sn();
    a.SnOpt("Cold");

    a.DCAusgabe("",a.sn_x,a.sn_la);
    a.DCSichere("MinEnergy.save");

    return 0;
}
```

MinimumEnergy.h


```

#include "col++.h"

#ifndef MINENERGY_H
#define MINENERGY_H

#define MINENERGY_H

class MinimumEnergy: public Col
{
public:

    int DCFunktional ( double* _phi, double* _xf, double* _uf ) ;
    int DCRechteSeite( double* _f , double* _x , double* _u ) ;
    int DCRand0 ( double* _r0 , double* _x0, double* _u0 ) ;
    int DCRandf ( double* _rf , double* _xf, double* _uf ) ;
    int DCUngleichung( double* _g , double* _x , double* _u ) ;

    int DCABlfunktional ( double* _phix, double* _phiu,
                        double* _xf, double* _uf ) ;
    int DCABlRechteSeite( double* _fx , double* _fu ,
                        double* _x , double* _u ) ;
    int DCABlRand0 ( double* _r0x , double* _r0u,
                    double* _x0 , double* _u0 ) ;
    int DCABlRandf ( double* _rfx , double* _rfu,
                    double* _xf , double* _uf ) ;
    int DCABlUngleichung( double* _gx , double* _gu,
                        double* _x , double* _u ) ;

    void DCInitParameter();
    void DCInitWerte();

    ~MinimumEnergy(){};
};
#endif

```

Diskretisierung col++.h

```

#include "snopt++.h"

#ifndef COL_H
#define COL_H

#define COL_H

class Col: public SnoptClass
{
public:

    int dc_nT, dc_nU, dc_nX, dc_nP, dc_nUgl, dc_nR0, dc_nRf, dc_nR;
    int dc_nCol_T, dc_nUgl_T, dc_nBed;

    double *dc_t_gitter,
           *dc_box_l_X, *dc_box_u_X,*dc_box_l_U, *dc_box_u_U;

    double dc_err_opt, dc_err_feas;

    double *dc_x0, *dc_u0;
    double *dc_l0;

    double *dc_adj, *dc_nbl;

    int dc_sparse;
    int dc_neJac;

    int dc_sp_nBed_0, dc_sp_nBed_n, dc_sp_nBed_f;

    // in die "Problem"- Klasse
    virtual int DCFunktional ( double* _phi,
                              double* _xf, double* _uf) = 0;
    virtual int DCRechteSeite( double* _f ,
                              double* _x , double* _u) = 0;
    virtual int DCRand0 ( double* _r0 ,
                        double* _x0, double* _u0) = 0;
    virtual int DCRandf ( double* _rf ,
                        double* _xf, double* _uf) = 0;
    virtual int DCUngleichung( double* _g ,
                              double* _x , double* _u) = 0;

    virtual int DCABlfunktional ( double* _phix, double* _phiu,
                                  double* _xf , double* _uf) = 0;
    virtual int DCABlRechteSeite( double* _fx , double* _fu ,
                                  double* _x , double* _u) = 0;
    virtual int DCABlRand0 ( double* _r0x , double* _r0u ,
                            double* _x0 , double* _u0) = 0;
    virtual int DCABlRandf ( double* _rfx , double* _rfu ,
                            double* _xf , double* _uf) = 0;
    virtual int DCABlUngleichung( double* _gx , double* _gu ,
                                  double* _x , double* _u) = 0;

    virtual void DCInitParameter() = 0;
    virtual void DCInitWerte() = 0;

```

```

// Initialisierungen
void DCInit_Sn();
void DCAlokation();

// Gitterverfeinerung
int ZeitPktEinfuegen(int* _N);
int ZeitPktFinden(int *_N);

// Ausgabe
int DCAusgabe(const char* _s, double *_p, double *_l);
int DCSichere(const char* _s);
int DCLade(const char* _s);

//Auswertung
void DCAdjungierte(double *_adj, double *_nbl, double *_l);
void DCHamilton(double *_H,
                double *_p, double *_adj, double *_nbl);
void DCFehler (double *_flr_adj, double *_flr_nbl,
              double *_flrI, double *_flr_def,
              double *_p, double *_adj, double *_nbl);

// notwendige (!!) Problemabhaengige Funktionen
void SnGradient (double*, double*);
void SnFunktional(double*, double*);
void SnJacobi (double*, double*);
void SnBedingugn(double*, double*);

void SnInitVektoren();

int DCJacIndex( const int _i_idx, const int _j_idx);

// Bildschirmausgabe f"ur den Test der Funktionen

void DCPlotParameter(double *_p) ;
void DCPlotFunktional(double *_p) ;
void DCPlotGradient(double *_p) ;
void DCPlotBedingungen(double *_p);
void DCPlotJacobi(double *_p) ;
double DCPlotJacobi2(double *_p) ;
void DCPlotBounds();

~Col();
};
#endif

```

Schnittstelle snopt++.h

```

#include <string.h> #include
<fstream.h> #include <iomanip.h> #include <stdlib.h>

#ifndef SNOPT_H
#define SNOPT_H

#define min(a,b) ( a < b ) ? a : b
#define max(a,b) ( a > b ) ? a : b

#define maxm 3000
#define maxn 300
#define maxne 200000
#define strLen 9
#define bufLen 56
#define BigBnd 1.e10
#define Ref 1
#define noRef 0

#define FKT_Con (int*, int*, int*, int*, \
                double*, double*, double*, int*, \
                char**, int*, int*, int*, double*, int*)

#define FKT_Obj (int*, int*, \
                double*, double*, double*, int*, \
                char**, int*, int*, int*, double*, int*)

typedef char Name[strLen];
typedef char Buffer[bufLen+1];

char* ZKt(char*);

class SnoptAb
{
public:
    void SnAllocAb(int, int, int);
    void SnFreeAb();

protected:
    int sn_lenr, sn_leni, sn_lenc;
    double* sn_r;
    int* sn_i;
    Name* sn_c;

```

```

};

class SnoptPm
{
public:
    void SnFreePm();

    char    sn_prob[strLen];
    int     sn_m, sn_n, sn_ne, sn_nName;
    int     sn_nnCon, sn_nnObj, sn_nnJac;
    int     sn_iObj, sn_nS, sn_nInf;
    int     sn_inform;
    int     sn_minCW, sn_minIW, sn_minRW;
    double  sn_sInf, sn_Obj;
    double  sn_ObjAdd;
// Eigentlich als Klasse Vektor<int>,
// entspricht einer Struktur SparseMatrix<double>
    int     *sn_ha, *sn_ka;
// Eigentlich als Vektor<double>
    double  *sn_a, *sn_bl, *sn_bu, *sn_hs, *sn_x, *sn_la, *sn_rc;

protected:
    char**  sn_names, sn_start[strLen];
};

class SnoptIO
{
public:
    void SnOpenIO(char*, char*, char*);
    void SnCloseIO();

protected:
    int     sn_iSpecs, sn_iPrint, sn_iSumm;
};

class SnoptClass : public SnoptAb , public SnoptIO, public SnoptPm
{
public:
// Problemabhaengige Funktionen
    virtual void SnGradient  (double*, double*) =0;
    virtual void SnFunktional(double*, double*) =0;

    virtual void SnJacobi    (double*, double*) =0;
    virtual void SnBedingugn(double*, double*) =0;

// optionale Parametereinstellungen von Snopt
    void SnSet(const char*, int);
    void SnSet(const char*, double);
    void SnGet(const char*, int&);
    void SnGet(const char*, double&);
    void SnSpec();

// notwendige Parametereinstellungen zum Start von Snopt
    void SnInitParameter(int, int, int, int, int, int, char*);
    void SnInitParameter(int, int, int, int, int, int, char*, int);
// fuer die Startwerte
    virtual void SnInitVektoren() = 0;

// Aufruf der Optimierung
    void SnOpt(char*);

// automatische Allokation und Freigabe des Arbeitsspeichers
    void SnInitAb();
    void SnFree();

    virtual ~SnoptClass(){};

private:
// Allokiert den Snopt-Speicherbereich, falls man das nicht explizit
// selbst machen will, wenn mann die zweite SnInitParameter-Routine
// mit Ref = 1 (letztes Argument) aufruft.

    void SnInitFeldRef();

// "Reinigung" der Zeichenketten
    void Zkt(char* , const char*);

// Funktionspointer fuer den Aufruf von Fortran
    static void SnObj_ FKT_Obj;
    static void SnCon_ FKT_Con;

    Name*      FCharDummy;
    double*    FDoubleDummy;
};
#endif

```